VẬN DỤNG QUY TRÌNH BỐN BƯỚC CỦA G.POLYA HƯỚNG DẪN HỌC SINH GIẢI BÀI TẬP TOÁN

LÊ THỊ HÒA BÌNH*

1. Dạy học giải toán là một trong những tình huống dạy học điển hình có vai trò quan trọng trong môn *Toán*. G.Polya cho rằng: "*Bài tập đặt ra sự cần thiết phải tìm kiếm một cách có ý thức phương tiện thích hợp để đạt tới một mục đích rõ ràng, nhưng không thể đạt được ngay*"(1; tr. 169). Ông chỉ rõ các thành phần cấu tạo của bài toán: "*Trong bất cứ bài toán nào cũng có ẩn - nếu tất cả đều đã biết rồi thì không còn phải tìm gì nữa... Trong mỗi bài toán lại còn phải có một điều gì đó đã biết, hoặc đã cho (dữ kiện) - nếu không cho trước cái gì cả thì không có một khả năng nào để nhận ra cái cần tìm, cho dù nó có ở ngay trước mắt ta thì ta cũng không thể nhận ra được... Sau cùng, trong bất kì bài toán nào cũng phải có điều kiện để cụ thể hóa mối quan hệ giữa ẩn và các dữ kiện... Điều kiện là yếu tố căn bản của bài toán*" (1; tr.19). Nhấn mạnh ý nghĩa của việc dạy cho học sinh (HS) biết tự phát hiện, tìm tòi cách giải quyết bài toán, G. Polya đã viết: "*Cách giải này thật đúng, nhưng làm như thế nào để nghĩ ra một cách giải khác? Sự kiện này đã được kiểm nghiệm, nhưng làm thế nào để phát hiện ra các sự kiện như vậy? Và làm thế nào để tự mình phát hiện ra được?*".

Theo tư tưởng sư phạm của G.Polya, cần phải giúp cho HS biết tiến hành hoạt động giải toán thông qua những thao tác trí tuệ, ông đã đưa ra phương pháp chung để giải bài toán theo quy trình bốn bước: - Tìm hiểu bài toán; - Xây dựng chương trình giải bài tập toán; - Trình bày lời giải; - Nghiên cứu sâu lời giải.

Trong bài viết này, chúng tôi chủ yếu nhằm cụ thể hóa việc vận dụng lí luận về quy trình giải bài tập toán của G.Polya vào dạy học một số bài tập toán ở các nội dung khác nhau.

2. Ví dụ minh họa (***Toán lớp 12***): Sau khi HS được học về tính đơn điệu của hàm số và chưa giải bài tập nào tương tự. Chứng minh:

$$\sin x + \tan x > 2x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}) \ (1).$$

Bước 1: Tìm hiểu bài toán

Giáo viên (GV): Bài toán đã cho thuộc loại toán nào? Trong bài toán thì đâu là ẩn? Có mấy ẩn? Ẩn có điều kiện gì không? Điều kiện đó có đủ để xác định các hàm số trong bài toán không?

HS: Bài toán chứng minh bất đẳng thức ẩn x, có một ẩn. Điều kiện của x là $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Điều kiện đó đủ để xác định các hàm số trong bài toán.

Bước 2: Xây dựng chương trình giải bài toán

GV: Trong bài toán, nếu coi mỗi vế của bất đẳng thức là một hàm số theo biến x thì ta có mấy hàm số?

HS: Có 2 hàm số.

GV: Việc so sánh giá trị của 2 hàm số có thể làm đơn giản hơn không? Em có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh ở dạng khác không? Đưa về xét một hàm số được không? Nếu được thì em biến đổi như thế nào?

HS: Có, chuyển vế như sau: (1)

$$\leftrightarrow \sin x + \tan x - 2x > 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

GV: Việc so sánh giá trị của 2 hàm số giờ có thể đưa về so sánh hai giá trị của cùng một hàm số nào? Với giá trị nào của x thuộc tập xác định để giá trị của hàm số bằng 0?

HS: Xét hàm số $f(x) = \sin x + \tan x - 2x$, $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Với x=0 thì f(x)=0.

GV: Bài toán có thể viết lại như thế nào?

HS: f(x) > f(0).

GV: Bài toán bây giờ có thể đưa về bài toán nào mà em đã học?

HS: Đưa về xét sự biến thiên của hàm số f(x) trên $(0; \frac{\pi}{2})$

GV: Căn cứ vào điều đang cần phải chứng minh, em có dự đoán gì về tính đơn điệu của hàm số trên tập đang xét?

HS: Hàm số đồng biến.

* Trường THPT Đinh Tiên Hoàng - Ninh Bình

GV: Tính đạo hàm của hàm số f(x), hàm f'(x) chỉ biểu thị theo một hàm số lượng giác nào? Dấu của hàm số lượng giác đó như thế nào trên tập đang xét?

HS: $f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, f'(x) chỉ biểu thị theo một hàm số lượng giác cosx và cosx>0 với mọi $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

GV: Căn cứ vào tập giá trị của hàm số cosx trên tập đang xét, em có thể so sánh giá trị của hai hàm số cosx và $\cos^2 x$ trên tập đang xét không?

HS: cosx ∈ (0;1] nên cosx > $\cos^2 x$ với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, tại x = 0 thì cosx = $\cos^2 x$.

GV: Mà $\cos^2 x$ và $1/\cos^2 x$ có tích bằng bao nhiêu? Em nghĩ đến xét bất đẳng thức nào? Khi đó em đã khẳng định được dấu của f'(x) chưa?

HS: Tích của $\cos^2 x$ và $1/\cos^2 x$ bằng 1 và hai hàm số này luôn nhận giá trị dương trên tập đang xét nên áp dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân của hai số dương. Khi đó f'(x) > 0.

Bước 3: Trình bày lời giải bài toán

(1) ↔ $\sin x + \tan x - 2x > 0, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Xét $f(x) = \sin x + \tan x - 2x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

$$f'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < \cos x \le 1 \Rightarrow \cos x \ge \cos^2 x$

$$\Rightarrow f'(x) \ge \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

Áp dụng bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho 2 số dương ta có:

$$\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2 \Rightarrow f'(x) \ge 0, \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): f(x) > f(0) \Leftrightarrow \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right): \sin x + \tan x - 2x > 0$$

(đpcm)

Bước 4: Nghiên cứu và kiểm tra kết quả bài toán

Kiểm tra lời giải: ở trên, có thể HS chỉ xét hàm số f(x) = sinx + tanx - 2x với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$. Khi đó, HS sẽ gặp vướng mắc trong việc tính f(0). Thay vì tính f(0) khi đó có thể tính giới hạn.

Nghiên cứu lời giải khác:

GV: Em có thể xét dấu của f'(x) với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ bằng cách đưa về xét dấu một biểu thức theo t = cosx được không?

HS: có thể chứng minh f'(x) ≥ 0, với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ bằng cách khác:

$$f'(x) = \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x^2 - \cos x - 1)}{\cos^2 x}$$

Sau đó đưa về xét dấu tử thông qua việc đặt ẩn phụ t = cosx, t ∈ [0;1).

Nghiên cứu sâu bài toán:

1) Đặc biệt hóa:

a) *Áp dụng với các góc nhọn của một tam giác:* Cho tam giác ABC nhọn, chứng minh: *sinA + sinB + sinC + tanA + tanB + tanC > 2π*

b) *Áp dụng cho góc cụ thể:* Chứng minh:

$$\sin\frac{\pi}{13} + \tan\frac{\pi}{13} > 2\frac{\pi}{13}$$

c) *Áp dụng cho góc cụ thể:* Chứng minh:

$$\sin 18^0 + \tan 18^0 > \frac{\pi}{10}$$

d) *Áp dụng cho trường hợp dấu bằng xảy ra:* Tìm x sao cho $\sin\sqrt{x} + \tan\sqrt{x} = 2\sqrt{x}$ với $x < \frac{\pi^2}{4}$

đ) *Thay đổi cách hỏi khác:* Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = \sin x + \tan x - 2x, \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

e) *Áp dụng cho hai giá trị của biến: x = a; x = b)* Chứng minh: $\sin a - \sin b - 2(a - b) > \tan b - \tan a, 0 \le b < a < \frac{\pi}{2}$

2) Ứng dụng lời giải của bài toán để giải bài toán khác:

a) *Ứng dụng cho bài toán tìm tham số để phương trình có nghiệm:* Tìm m để phương trình: sinx + tanx - 2x = m có nghiệm $x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

b) *Ứng dụng cho bài toán tìm tham số để bất phương trình nghiệm đúng mọi x thuộc D:* Tìm m để: sinx + tanx - 2x ≥ m, $\forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$.

c) *Ứng dụng giải phương trình:* Giải phương trình:

$$\sin\sqrt{x} + \tan\sqrt{x} - 2\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{2} - 9x}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - 9x}\right) + \tan\left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - 9x}\right)$$

d) Ứng dụng giải hệ phương trình: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sin x + \tan x - 2x = \sin y + \tan y - 2y \\ \sqrt{x} + 6\sqrt{y} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Tương tự hóa:

a) Mở rộng theo hướng thay biến tương tự: Chứng minh: $\sin 3x + \tan 3x > 6x, \forall x \in \left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$

b) (Mở rộng theo hướng thay đổi khoảng xác định)

* Chứng minh: $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$: $\sin x + \tan x < 2x$

* Tìm $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thỏa mãn *sinx + tanx = 2x*

* Chứng minh: sin a + tan a - sin b > tan b - 2(b - a) với $-\frac{\pi}{2} < b < a < \frac{\pi}{2}$

c) Mở rộng theo hướng xét hàm tương tự:

Chứng minh:

* $\cos x + \cot x + 2x > \pi, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

* $\cos x + \cot x + 2x < \pi, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

* Nếu tam giác ABC nhọn thì *cosA + cosB + cosC + tanA + tanB + tanC > π*

* Tìm x ∈ (0, π) sao cho cosx + cotx = π - 2x

* Chứng minh *cosa + cota + 2(a - b) > cosb + cotb* với 0<*a*<*b*< $\frac{\pi}{2}$

d) Mở rộng theo hướng thay đổi hệ số cách 1: áp dụng BĐT Côsi cho 2 số:

Chứng minh: $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

* $2\sin x + \frac{1}{2}\tan x > 2x$ d) $4\sin x + \frac{1}{4}\tan x > 2x$

* $\frac{1}{2}\sin x + 2\tan x > 2x$ e) $2\sin x + \frac{9}{2}\tan x > 6x$

* $\frac{1}{4}\sin x + 4\tan x > 2x$ f) $\sin x + 9\tan x > 6x$

đ) Mở rộng theo hướng thay đổi hệ số cách 2: áp dụng BĐT Côsi cho 3 số:

Chứng minh: $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta có: $\sin x + 4\tan x > 3x$; $\frac{1}{3}\sin x + \frac{32}{5}\tan x > 2x$; $\frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\tan x > x$

Hướng dẫn a) Xét hàm số *f(x)=sinx+4tanx-3x* với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

Ta có $f'(x) = \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} - 3 = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\cos^2 x} - 3$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta được:

$\frac{\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2} + \frac{4}{\cos^2 x} \geq 3$ hay $f'(x) \geq 0$, với $x \in (0; \frac{\pi}{2})$

suy ra f(x) đồng biến trên nửa khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$.

Từ đó ta có với $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì f(x) > f(0) = 0 ta được điều phải chứng minh.

4) Khái quát hóa:

Hướng 1: Mở rộng tập xác định của x

Chứng minh: 1. sinx + tanx ≥ 2x, ∀x thỏa mãn: $k2\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

2. $\sin x + \tan x < 2x, \forall x$ thỏa mãn:

$-\frac{\pi}{2} + k2\pi < x < k2\pi, k \in Z$

Hướng 2: Mở rộng hệ số của sinx, tanx, x theo

Cách 1: Sử dụng $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$: $\cos x > \cos^2 x$

Áp dụng BĐT côsi cho 2 số dương. Ta có $\frac{k}{m}\sin x + \frac{n}{m}\tan x > hx, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, trong đó *k, n, m, h* là các số dương thỏa mãn: $h = \frac{\sqrt{k.n}}{m}$.

Cách 2: Áp dụng BĐT côsi cho 3 số dương. Ta có: $\frac{k}{m}\sin x + \frac{n}{m}\tan x > hx, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ trong đó *k, n, m, h* là các số dương và $h = \frac{3}{m}\sqrt[3]{\frac{k^2 n}{4}}$.

Hướng 3: Theo phương pháp đạo hàm: Chứng minh: $f(x) > g(x), \forall x \in D$.

Đưa về chứng minh: $f(x) - g(x) > 0, \forall x \in D$.

3. Để việc vận dụng quy trình giải bài toán của G.Polya vào dạy học giải toán có hiệu quả, trong mỗi bước của quy trình này, giáo viên cần tận dụng mọi cơ hội để lồng ghép các câu hỏi dẫn dắt suy nghĩ của HS, giúp các em tìm tòi lời giải bài toán một cách chủ động, sáng tạo. Điều quan trọng không phải ở chỗ HS giải được bài toán mà quan trọng là cách phát hiện, tìm tòi lời giải dựa trên những dữ kiện của bài toán đã cho, phát hiện, khai thác được mối quan hệ giữa bài tập đang xét và các bài tập khác, phát triển khả năng tương tự, đặc biệt hóa, khái quát hóa, từ đó thu được tri thức phương pháp để giải một dạng toán. Đặc biệt dần dần giúp HS hình thành khả năng tự đặt ra và trả lời được những câu hỏi để giải và khai thác bài toán. ❑

---

(1) G.Polya. **Giải một bài toán như thế nào.** NXB *Giáo dục*, H.1997.

Tài liệu tham khảo

Phí Thị Thùy Vân. "Vận dụng quy trình giải bài toán của G. Polya vào dạy học giải bài tập toán cho học sinh chuyên Toán". Tạp chí *Khoa học giáo dục*, số 4/2006.

SUMMARY

Teaching how to solve the question of mathematics, is one of the typical teaching situations which plays as an important role in Mathematics. According to the pedagogical ideas of G.Polya, we need to help pupils know how to solve the question of math conducted through the manipulation of intellectual, he gave general method to solve the problem according to the four-step process.By giving a specific example to apply the reasoning process of G.Polya's pedagogical ideas in math teaching, in order to contribute to the application ofhow to solve the question of mathematicsprocess of G.Polya in teaching on the specific mathematical content. Pupils not only solve the questions but also the important way to discover, explore a solution based on the facts of the given question;and detect, exploit the relationship between the current question and others, develop similar capabilities, specializing, generalizing, and then earn the knowledge method to solve a format of math.

Sử dụng mối quan hệ nhân - quả...

(Tiếp theo trang 52)

3. Với ý nghĩa của quan hệ nhân quả, trong quá trình giảng dạy, giáo viên cần phát huy các điểm sau: - Trong nhận thức và hoạt động thực tiễn cần tôn trọng tính khách quan của mối liên hệ nhân quả. Không được lấy ý muốn chủ quan thay cho quan hệ nhân quả; - Muốn cho hiện tượng nào đó xuất hiện cần tạo ra những nguyên nhân cùng những điều kiện cho những nguyên nhân đó phát huy tác dụng. Ngược lại, muốn cho hiện tượng nào đó mất đi thì phải làm mất nguyên nhân tồn tại của nó cũng như những điều kiện để các nguyên nhân ấy phát huy tác dụng; - Phải biết xác định đúng nguyên nhân để giải quyết vấn đề nảy sinh vì các nguyên nhân có vai trò không như nhau; - Nguyên nhân có thể tác động trở lại kết quả; do đó, trong hoạt động thực tiễn cần khai thác, tận dụng những kết quả đã đạt được để thúc đẩy nguyên nhân tác động theo hướng tích cực phục vụ cho con người.

Qua bài viết, rất mong có sự đóng góp của các bạn đọc để tài liệu có ý nghĩa hơn trong thực tế giảng dạy, góp phần đổi mới phương pháp dạy học trong giai đoạn mới. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Phạm Văn Hoàn - Nguyễn Gia Cốc - Trần Thúc Trình. **Giáo dục học môn Toán.** NXB *Giáo dục*, H. 1981.
2. Lê Doãn Tá. **Một số vấn đề triết học Mác - Lênin: Lí luận và thực tiễn** (tái bản có bổ sung). NXB *Chính trị quốc gia - Sự thật*, H. 2003.
3. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán.** NXB *Đại học sư phạm Hà Nội*, 2008.
4. Nguyễn Thanh Hưng. "Phát triển tư duy biện chứng của học sinh trong dạy học hình học ở trường trung học phổ thông". Luận án tiến sĩ.

SUMMARY

Using pairs of categories of dialectical philosophy materialism in teaching Mathematics are one of the effective measures to develop thinking, capacity for students. In this article, the authors showed cause and effect relationships by using lesson plans in geometry class 10. Besides, the author hopes that these new teaching methods will help other teachers have a new source of reference as well as renew the current teaching methods.

Nâng cao chất lượng học tập...

(Tiếp theo trang 65)

2. Dự án SREM. **Quản trị hiệu quả trường học.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2010.
3. **Luật Giáo dục 2005** (sửa năm 2009). NXB *Chính trị quốc gia - Sự thật*, H. 2010.

SUMMARY

Article outlined a number of measures aimed at improving the quality of entrance exam for high school students in grades 9 schools boarding Bat Xat and enhancing quality teaching staff, enhance the quality of learning students and reinforce a number of teaching and learning activities of the school.