

# XÁC ĐỊNH MOMEN QUÁN TÍNH CỦA VẬT RẮN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP QUỲ VỀ HÀM MỘT BIẾN TRONG DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP PHẦN CƠ HỌC VẬT RẮN Ở CÁC TRƯỜNG CAO ĐẲNG SƯ PHẠM

ThS. NGÔ GIA VINH\*

**T**rong chương trình đào tạo giáo viên vật lý ở các trường cao đẳng sư phạm có phần *Cơ học vật rắn*. Nội dung phần này có rất nhiều bài tập (BT) liên quan đến khái niệm vật lý: "*Momen quán tính của vật rắn*" và đưa ra công thức tính Momen quán tính của một số vật rắn có tính chất đối xứng để giải các BT. Trong kĩ thuật tìm Momen quán tính của vật rắn, phải xây dựng biểu thức tích phân, tích phân nhiều lớp của hàm nhiều biến; phần lớn biểu thức dưới dấu tích phân là rất phức tạp, sinh viên (SV) chưa đủ kiến thức toán để tính trực tiếp các tích phân này. Tuy nhiên, nếu biết cách phân tích bài toán thành các vấn đề nhỏ và quy về bài toán một biến số thì việc tính toán sẽ trở nên đơn giản hơn, SV có thể tự giải các BT ở nhà và hiểu sâu sắc hơn bản chất của các đại lượng vật lý, đồng thời củng cố được kiến thức.

## 1. Cơ sở lý thuyết

Khi nghiên cứu động lực học của hệ nhiều hạt, vật rắn trong chuyển động quay xung quanh một trục xuất hiện biểu thức:  $\sum_{k=1}^n m_k r_k^2$ , nếu hệ liên kết chặt, phân bố liên tục trong không gian (vật rắn) thì có biểu thức tương đương là  $\int_V \rho(r)r^2 dV$ . Tùy theo sự phân bố của vật rắn trong không gian mà miền V có thể là không gian 1, 2 hoặc 3 chiều, tương ứng với tích phân 1, 2 hoặc 3 lớp cùng số biến số. Đại lượng vật lý được xác định từ hai biểu thức trên được gọi là Momen quán tính của vật rắn đối với trục quay đã cho (gọi tắt là Momen quán tính của vật rắn), kí hiệu:

$$I = \int_V \rho(r)r^2 dV \quad (1).$$

Về ý nghĩa vật lý, Momen quán tính của vật rắn I đặc trưng cho mức quán tính của vật trong chuyển động quay xung quanh một trục (tương tự như khối lượng của vật trong chuyển động tịnh tiến). Biểu thức (1) cho thấy, nếu vật rắn có hình thù bất kì, phân bố không đồng nhất thì biểu thức (1) rất phức tạp, việc

xác định I sẽ rất khó khăn. Thông thường, vật rắn được xem như một vật đồng nhất và  $\rho(r) = \text{const}$ , việc tính I từ công thức (1) chỉ phụ thuộc vào độ phức tạp về hình dạng của vật rắn (miền V).

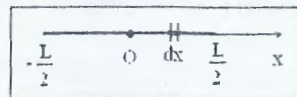
Nếu trục quay không đi qua khối tâm, áp dụng công thức Huyghen thông qua Momen quán tính của vật rắn đối với trục quay đi qua khối tâm  $I_0$ , ta có:  $I = I_0 + a^2 M$ . Trong quá trình giảng dạy, chúng tôi nhận thấy: đối với SV, công thức (1) dễ nhớ nhưng các em gặp khó khăn khi vận dụng vào giải BT, ngay cả đối với bài toán đơn giản nhất (vật rắn phân bố theo không gian một chiều). Nguyên nhân có thể là do SV: + Chưa biết cách chọn gốc tọa độ phù hợp, các em gặp khó khăn trong việc xác định r trong hệ tọa độ (khoảng cách từ chất điểm đang xét đến trục quay) hay nhầm lẫn với giá trị r trong đề BT; + Còn lúng túng trong việc xác định cận của tích phân tương ứng với các biến số; + Không tính được tích phân trong trường hợp nhiều biến số.

Để giúp SV khắc phục các nguyên nhân trên, dưới đây, chúng tôi hướng dẫn SV cách chuyển về bài toán một chiều (tương ứng 1 biến).

## 2. Một số BT cụ thể

**BT 1:** Tính Momen quán tính của thanh thẳng đồng nhất có chiều dài L, khối lượng M quay xung quanh trục vuông góc với thanh đi qua khối tâm của nó.

Chọn gốc tọa độ O như hình 1. Chia thanh thành những đoạn nhỏ dx sao cho mọi chất điểm trên dx coi như một chất điểm có khoảng cách là x đến gốc



Hình 1

O.

Áp dụng công thức (1), ta được:

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho \cdot x^2 dx = 2\rho \int_0^{L/2} x^2 dx = \frac{2}{3} \rho x^3 \Big|_0^{L/2} = \frac{1}{12} \rho L^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

\* Phòng ĐT - QLKH - QHQT, Trường Cao đẳng sư phạm Bắc Ninh

**BT 2:** Tính Momen quán tính của vật phẳng mỏng hình chữ nhật đồng nhất có khối lượng M, kích thước a, b quay xung quanh trục vuông góc với mặt phẳng của nó và đi qua khối tâm.

Đây là bài toán vật có kích thước phân bố trong không gian 2 chiều (x, y) quay xung quanh trục Oz (xem hình 2). Mỗi chất điểm trên vật có tọa độ x, y thì khoảng cách đến trục quay là  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . SV có thể giải BT này theo các cách sau:

**Cách 1** (tính thông thường): Áp dụng công thức (1):

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \rho(x^2 + y^2) dy dx$$

**Cách 2** (quy về

hàm 1 biến): Chia mặt phẳng bởi các đường thẳng song song với Oy có phương trình x và x + dx, ta có thể coi phần mặt phẳng trong khoảng giữa x và x + dx như một thanh thẳng trong BT 1, có khối lượng  $dm = \rho b dx$ .

Áp dụng kết quả BT 1, ta có:

$$I = 2 \int_0^{a/2} \left( \frac{1}{12} b^2 dm + x^2 dm \right) = 2 \int_0^{a/2} \left( \frac{1}{12} b^2 + x^2 \right) \rho b dx = 2 \rho b \left( \frac{1}{12} b^2 x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{a/2}$$

$$= \frac{\rho a b}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2).$$

**BT 3:** Tính Momen quán tính của hình trụ đặc đồng nhất khối lượng M, bán kính đáy R quay xung quanh trục của nó (hình 3).

Đây là bài toán vật phân bố trên không gian 3 chiều, miền lấy tích phân là miền V (toàn bộ thể tích hình trụ). Việc xây dựng và tính toán biểu thức dưới dấu tích phân rất phức tạp, có thể quy về hàm 1 biến như sau:

Gọi H là chiều cao hình trụ. Chia thể tích hình trụ bằng những mặt trụ đồng tâm có bán kính đáy là r và r + dr. Các chất điểm trong phần thể tích hình trụ nằm giữa 2 mặt trụ có cùng khoảng cách đến trục quay là r (dr rất nhỏ) nên Momen quán tính của nó đối với trục quay là:  $dI = r^2 dM = 2\pi H r^3 dr$ , suy ra

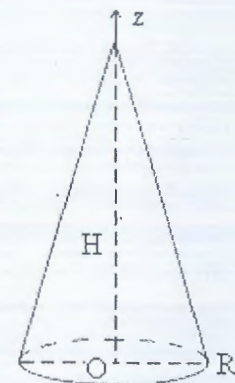
$$I = 2\pi H \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi H \rho R^4 = \frac{1}{2} M R^2$$

Kết quả I không phụ thuộc H nên có thể áp dụng kết quả này cho đĩa tròn đồng nhất.

**BT 4:** Tính Momen quán tính của hình nón đồng nhất có chiều cao H, bán kính đáy R, khối

lượng M quay xung quanh trục của nó (hình 4).

Đây là bài toán vật phân bố trong không gian 3 chiều, theo công thức (1) thì biểu thức tính Momen quán tính của vật là tích phân 3 lớp, với 3 biến số là x, y, z. Nếu tính trực tiếp theo công thức (1), SV sẽ gặp rất nhiều khó khăn khi xây dựng biểu thức dưới dấu tích phân, cần lấy tích phân và tính tích phân 3 lớp. Ta có thể đơn



Hình 4

giản hóa bài toán quy về một biến theo cách sau: chia hình nón bởi các mặt phẳng song song với đáy, các mặt có tọa độ là z và z + dz. Khoảng cách dz rất nhỏ sao cho các chất điểm trên khoảng giữa z và z + dz có cùng độ cao so với đáy. Khi đó, có thể coi phần hình nón nằm giữa z và z + dz là một đĩa tròn đồng nhất có bán kính r, khối lượng dM và thu được:

$r = R \frac{H-z}{H}$ ;  $dM = \rho \pi r^2 dz = \rho \pi R^2 \frac{(H-z)^2}{H^2} dz$ ; Momen quán tính của nó đối với trục quay Oz (áp dụng kết quả BT 3) là:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dM = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \frac{(H-z)^4}{H^4} dz$$

Vậy, Momen quán tính của hình nón đối với trục quay Oz là:

$$I = \frac{1}{2} \rho \pi R^4 \int_0^H \frac{(H-z)^4}{H^4} dz = -\frac{\rho \pi R^4}{2H^4} \cdot \frac{(H-z)^5}{5} \Big|_0^H = \frac{1}{10} \rho \pi R^4 H$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{3}{10} M R^2 \quad (\text{với } M = \frac{1}{3} \pi R^2 H).$$

### 3. BT áp dụng

Tính Momen quán tính của một số vật rắn trong các trường hợp sau:

1) Hình cầu đặc đồng nhất bán kính R, khối lượng M quay quanh trục đi qua tâm.

**Hướng dẫn:** Áp dụng cách giải như BT 4.

2) Đĩa tròn đồng nhất, khối lượng M, bán kính R quay quanh trục nằm trong mặt phẳng đĩa và đi qua tâm.

**Hướng dẫn:** Chọn hệ tọa độ Oxy, trùng với mặt phẳng đĩa, gốc tọa độ là tâm đĩa. Không mất tính tổng quát, ta giả thiết đĩa quay quanh trục Ox. Chia mặt đĩa bằng các đường thẳng vuông góc với trục Ox có phương trình x và x + dx, khi đó, phần đĩa nằm giữa x và x + dx có thể coi là một thanh thẳng đồng nhất có chiều dài  $l = \sqrt{R^2 - x^2}$  và áp dụng kết quả BT 1 để giải tiếp.

3) Hình trụ đặc, bán kính R, khối lượng M, chiều cao H, quay quanh trục (D) vuông góc với trục của hình trụ và đi qua khối tâm của nó.

**Hướng dẫn:** Chọn trục tọa độ Oxyz gốc tại trọng tâm của hình trụ, Oz trùng với trục của hình trụ. Chia hình trụ bởi các mặt phẳng song song với Oz có tọa độ là z và z + dz. Phần hình trụ nằm giữa 2 mặt phẳng có thể coi là đĩa tròn đồng nhất, chọn trục quay (D') đi qua tâm của nó và // (D). Áp dụng kết quả BT 3 và định lý Huyghen để xây dựng biểu thức dưới dấu tích phân và giải bài toán.

Trên đây là kĩ thuật xây dựng tích phân và đơn giản hóa những bài toán phức tạp trong việc tìm Momen quán tính của một số vật rắn có tính chất đối xứng trong phần *Cơ học vật rắn*. Vận dụng kĩ thuật này, SV có thể giải quyết các bài toán tĩnh điện (sự tích điện của một số vật có kích thước gây ra điện trường ở xung quanh nó,...) cũng như các bài toán về từ trường (cảm ứng từ gây ra tại một điểm

của một số dòng điện đi qua vật dẫn có hình thù khác nhau). □

#### Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Hữu Minh. *Cơ học*. NXB Giáo dục, H. 1999.
2. David Halliday. *Cơ sở vật lí*. NXB Giáo dục, H. 1999.

#### SUMMARY

*In training college physics teachers curriculum (Teachers of physics, of mathematics bachelor of informatics,...). The content of this section has a lot of exercises related of physical concepts "Moment of inertia of a solid" and stated the formulas for calculating the moment of inertia of some solid symmetrical mature to apply the relevant exercises. However, if you know how to analyze the problem into smaller problem for you on one-variable problem, the calculation becomes fairly self explanatory that students can do at home. In doing so, all the formulas presented in the program can be demonstrated, students can better understand the nature of this physical quantity and strengthen math - an important tool in the study of physics.*

## Tình trạng "học trú chân"...

(Tiếp theo trang 64)

bảo sự duy trì sinh hoạt và thực hành để mỗi nhóm SV (10 SV/nhóm) được tham gia ít nhất một lần.

- Nhà trường kết hợp chặt chẽ với các ban, ngành hữu quan trong tỉnh xây dựng, thực hành, trải nghiệm hệ thống KNS cho HS ở các cấp học giúp các em hiểu được ý nghĩa của cuộc sống đồng thời có những quyết định đúng đắn trong việc lựa chọn nghề nghiệp cho bản thân trong tương lai.

\*\*\*

Hiện tượng "học trú chân" của SV ở các trường ĐH, CĐ đã làm ảnh hưởng không nhỏ đến chất lượng dạy và học của nhà trường; gián tiếp phản ánh sự non kém, thiếu hụt các KNS của SV. Vì vậy, việc giáo dục, tạo lập cho SV hệ thống KNS để bắt nhịp được với cuộc sống hiện đại, với xu thế hội nhập là yêu cầu thiết, giúp các em đạt thực hiện được 4 trụ cột trong học tập do UNESCO đề ra: "Học để biết", "Học để làm việc", "Học để cùng chung sống" và "Học để tự khẳng định mình". □

(1) Quốc Việt. "83% SV thiếu kĩ năng sống". <http://phapluattp.vn>

#### Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Thanh Bình. *Giáo trình chuyên đề giáo*

dục kĩ năng sống. NXB Đại học sư phạm Hà Nội, 2010.

2. Nguyễn Văn Lê. *Học sinh, sinh viên với văn hóa đạo đức trong ứng xử xã hội*. NXB Giáo dục, H. 2006.

#### SUMMARY

*Incontemporary life, living skills of students in University level are concerned issue of the whole society. The lacking of living (including basic skill and soft skills) considerably effect on their future. The way of unsettled study in the way they show the absence of living skills of big part students. It directly effect on their result and training. Besides, in makes the classroom's stability is broken down, and indirectly effects on the education process of colleges and universities.*

## Chất lượng nguồn nhân lực...

(Tiếp theo trang 64)

đại biểu toàn quốc lần thứ XI. NXB Chính trị quốc gia - Sự thật, H. 2011.

2. Tỉnh ủy Kiên Giang. *Văn kiện Đại hội đại biểu Đảng bộ tỉnh lần thứ IX, nhiệm kỳ 2010 - 2015*, 2010.

3. Ủy ban nhân dân tỉnh Kiên Giang. "Quyết định phê duyệt quy hoạch phát triển nhân lực tỉnh Kiên Giang giai đoạn 2011 - 2020" (ngày 23/02/2012).

4. Cục Thống kê Kiên Giang. "Số liệu thống kê kinh tế - xã hội Kiên Giang 30 năm (1975 - 2005)". Kiên Giang, 2007.