RÈN LUYỆN TƯ DUY CHO HỌC SINH THÔNG QUA KHAI THÁC VÀ PHÁT TRIỂN BÀI TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA

ThS. TẠ KHẮC ĐỊNH*

Dạy học nói chung là một quá trình truyền thụ tri thức. Song, đối với môn *Toán*, ngoài truyền thụ tri thức cho học sinh (HS), việc rèn luyện tư duy như: phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa... là một nhiệm vụ không thể thiếu. Do đó, trong dạy học toán, cần rèn luyện cho HS khả năng phát hiện vấn đề, khơi dậy những ý tưởng mới, tạo tình huống có vấn đề cho HS tìm tòi, sáng tạo.

1. Bài toán (BT) xuất phát: "Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức: $A=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ **(Đại số 10 nâng cao; tr.112)**".

Lời giải: Với, $x\in[1;4]$ ta có: $A^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\right)^2=$ $3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}\le 3+x-1+4-x=6$, suy ra $A\le\sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x-1=4-x\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$ (thỏa mãn điều kiện $x\in[1;4]$). Vậy, GTLN của biểu thức $A=\sqrt{6}$.

Mặt khác: $A^2=\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\right)^2=3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}\ge 3$ (vì $\sqrt{(x-1)(4-x)}\ge 0$) nên $A\ge\sqrt{3}$.

$A^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$; suy ra $A=\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$. Vậy, GTNN của $A=\sqrt{3}$.

Phân tích: Lời giải BT này là đơn giản và dễ hiểu đối với HS. Vấn đề đặt ra cho giáo viên (GV) là: có thể khai thác BT theo những hướng nào? Làm thế nào để HS nắm được bài một cách có hệ thống và phát huy tính tích cực, tự giác học tập, phát triển tư duy cho các em?. Khai thác BT để tìm các cách giải khác nhau cho BT.

Trước hết, GV yêu cầu HS phát biểu BT dưới dạng: ***"Chứng minh rằng: Với mọi** $x\in[1;4]$ **thì** $\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\le\sqrt{6}$ **(2)".***

GV có thể hướng dẫn HS chứng minh bất đẳng thức (2) bằng nhiều phương pháp khác nhau xét từ nhiều khía cạnh để rèn luyện tư duy sáng tạo cho HS.

Cách 1 (phương pháp biến đổi tương đương): $\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\right)^2\le 6\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(4-x)}\le 3\Leftrightarrow(2x-5)^2\ge 0$ luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{5}{2}$.

Cách 2 (phương pháp phản chứng): Giả sử tồn tại $x_0\in[1;4]:\sqrt{x_0-1}+\sqrt{4-x_0}>\sqrt{6}$. Khi đó, ta có: $\sqrt{x_0-1}+\sqrt{4-x_0}>\sqrt{6}\Leftrightarrow\sqrt{(x_0-1)(4-x_0)}>\frac{3}{2}\Leftrightarrow(2x_0-5)^2<0$ (vô lí).

Cách 3 (phương pháp đánh giá): Với $A=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$, ta có $A^2=3+2\sqrt{(x-1)(4-x)}\le$ $6\Leftrightarrow A^2=3+2\sqrt{\frac{9}{4}-(x-\frac{5}{2})^2}\le 6$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{5}{2}$.

Cách 4 (áp dụng bất đẳng thức Cô si): Ta có

$$\sqrt{(x-1)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{(x-1).\frac{3}{2}}\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{(x-1)+\frac{3}{2}}{2},\quad \sqrt{(4-x)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{(4-x).\frac{3}{2}}\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\frac{(4-x)+\frac{3}{2}}{2}.$$

Cộng vế theo vế, ta có:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}\le\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\left(\frac{(x-1)+\frac{3}{2}}{2}+\frac{(4-x)+\frac{3}{2}}{2}\right)=\sqrt{6}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\frac{5}{2}$.

Cách 5 (sử dụng phương pháp vectơ): Đặt $\vec{u}=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\vec{v}=\left(\sqrt{x-1};\sqrt{4-x}\right)$. Khi đó, áp

* Trường THPT Diễn Châu 2, Nghệ An

dụng bất đẳng thức: $\vec{u}.\vec{v} \le |\vec{u}|.|\vec{v}|$, ta có $A \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{3}{2} \\ \sqrt{4-x} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

Cách 6 (dùng miền giá trị của hàm số): Xét hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$.

Gọi T là tập giá trị của hàm số. Ta có: $y_0 \in T \Leftrightarrow y_0 = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ có nghiệm $x \in [1;4]$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \ge 0 \\ y_0^2 - 3 = 2\sqrt{x-1}.\sqrt{4-x} \end{cases}$ có nghiệm $x \in [1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \ge \sqrt{3} \\ x^2 - 5x + 4 + \frac{1}{4}(y_0^2 - 3)^2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $x \in [1;4] \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 \ge \sqrt{3} \\ \Delta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} \le y_0 \le \sqrt{6}$

Cách 7 (sử dụng đạo hàm): Xét hàm số: $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$, có tập xác định $D = [1;4]$. Ta có: $y' = f'(x) = \left(\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}\right)'$.

$$\frac{5-2x}{2(\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x})\sqrt{(x-1)(4-x)}} \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta được: $\sqrt{3} \le y \le \sqrt{6}$.

- Ta có thể đưa về hệ phương trình đối xứng: tìm y_0 để phương trình $y_0 = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$ có nghiệm.

Đặt, $a = \sqrt{x-1}$, $b = \sqrt{4-x}$ ($a, b \ge 0$). Ta có hệ: $\begin{cases} a+b = y_0 \\ a^2 + b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = y_0 \\ a.b = \frac{1}{2}(y_0^2 - 3) \end{cases}$. Hệ phương trình có nghiệm không âm khi và chỉ khi phương trình: $X^2 - y_0X + \frac{1}{2}(y_0^2 - 3) = 0$ có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = y_0^2 - 2(y_0^2 - 3) \ge 0 \\ y_0 \ge 0 \\ y_0^2 - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3} \le y_0 \le \sqrt{6}$.

Cách 8 (lượng giác hóa): Từ điều kiện $1 \le x \le 4 \Rightarrow -1 \le \frac{2x-5}{3} \le 1$. Đặt: $\cos\alpha = \frac{2x-5}{3}, \alpha \in [0;\pi]$, ta có: $\sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}(x-1)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{2x-5}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos\alpha}$;

$\sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}(4-x)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{2x-5}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos\alpha}$.

Khi đó: $P = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}\right)$ $= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{3}.\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{6}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$.

2. Khai thác kết quả BT

Có thể áp dụng BT đã cho ở trên để giải các BT có nội dung tương tự và khó hơn, qua đó, phát triển tư duy sáng tạo cho HS.

1) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $P = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}$.

2) Tìm m để phương trình: $P = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = m$ có nghiệm.

3) Giải và biện luận phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = m$.

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của m để bất phương trình $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \le m$ thỏa mãn với $\forall x \in [1;4]$.

5) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \ge m$ có nghiệm.

6) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \ge m$ đúng với $\forall x \in [1;4]$.

7) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \le m$ có nghiệm.

8) Tìm m để bất phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} \le m$ đúng với $\forall x \in [1;4]$.

9) Tìm m để phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} = x^2 - 4x + m$ có nghiệm thực.

10) Tìm m để phương trình: $\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x-1)(4-x)} = m$ có nghiệm thực.

3. Mở rộng và tổng quát hóa BT

BT mở rộng 1: Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{4-x}, \forall x\in[1;4]$.

GV yêu cầu HS tìm nhiều lời giải khác nhau cho BT (chẳng hạn như đưa về hệ phương trình, dùng đạo hàm, sử dụng bất đẳng thức Cô-si hay Bunhiacopxki)...

BT tổng quát 1. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P=\sqrt[n]{x-1}+\sqrt[n]{4-x}$, với $\forall x\in[1;4]$.

BT mở rộng 2. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức: $P=5\sqrt{x-1}+6\sqrt{4-x}$ với, $\forall x\in[1;4]$ với $\forall x\in[1;4]$.

GV yêu cầu HS tìm nhiều cách giải cho BT (chẳng hạn như đưa về hệ phương trình, dùng đạo hàm, sử dụng bất đẳng thức Cô-si hay Bunhiacopxki, phương pháp vectơ,...).

BT tổng quát 2. Tìm GTLN và GTNN nhỏ nhất của biểu thức: $P=a\sqrt[n]{x-1}+b\sqrt[n]{4-x}$, với a, b> 0, $\forall x\in[1;4]$.

* * *

Để bồi dưỡng, phát triển năng lực tư duy sáng tạo cho HS, GV có thể hệ thống hóa kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa, tìm tòi nhiều các giải khác nhau, đi đến sáng tạo và đề xuất BT mới cho một BT ban đầu. Qua đó, gây hứng thú và niềm say mê học tập cho HS. Quá trình tìm tòi, khám phá ra các cách giải quyết vấn đề khác nhau cho một BT góp phần rèn luyện và phát triển khả năng sáng tạo cho HS trong dạy và học toán. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim (chủ biên). **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2004.
2. Nguyễn Văn Thuận. *Góp phần phần phát triển năng lực tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ Toán học cho học sinh đầu cấp trung học phổ thông trong dạy học đại số*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh, 2004.
3. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên). **Đại số 10 nâng cao**. NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2011.
4. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên). **Bài tập Đại số 10 nâng cao**. NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2011.

SUMMARY

This article initiates from exploiting exercises so as to systematize the basic knowledge in text-books, searching for many different solutions, then we start creating and suggesting series of new sums for a sum participating in fostering, training and developing the creative thought for students.

Tầm quan trọng của kĩ năng...

(Tiếp theo trang 25)

không quan tâm đến tầm quan trọng của KNM, nên không hỗ trợ, bổ sung thêm cho các khóa học trong lĩnh vực này. Để đào tạo KNM cho SV một cách hiệu quả nhất là tích hợp chúng vào dạy học các KNC. Cách làm này sẽ không làm thay đổi chương trình dạy học mà sẽ chỉ thay đổi thông qua phương pháp luận dạy học của GV. Việc GV tăng cường các cuộc thảo luận nhóm, cho phép SV làm bài thuyết trình và sử dụng các phương pháp tối ưu khác để thực hành KNM có thể được áp dụng trong suốt khóa học. Chẳng hạn, khi GV chuẩn bị một bài giảng cụ thể, trước hết GV phải xây dựng kế hoạch bài giảng bằng cách xác định trước những KNM muốn tăng cường, áp dụng vào bài giảng, sau đó xem xét nội dung bài giảng để sắp xếp phù hợp. Áp dụng đúng sẽ giúp bài giảng tăng tính hấp dẫn và hiệu quả, cùng đó phát triển được cả KNC và KNM.

* * *

Giáo dục đại học mang trên mình trách nhiệm đặc biệt về hướng dẫn, thực hành, phát triển KNM cho SV. Vì vậy, bên cạnh việc nâng cao nhận thức về tầm quan trọng của KNM và khuyến khích SV nâng cao KN, GV phải tích cực thực hành các KNM cho SV. Cách làm hiệu quả nhất là tích hợp KNM vào quá trình dạy các KNC, cùng đó sẽ giúp các bài học sẽ trở nên hấp dẫn hơn và sẽ làm tăng tỉ lệ thành công của người học. ❑

(1) Wikipedia: www.en.wikipedia.com

(2) Phani Challa Ram: http://in.rediff.com/getahead/2007/jan/08soft.htm

(3) Paul T. Brinkman - Anthony W. Morgan. **Financial Planning: Strategies and Lessons Learned**. 2010.

Tài liệu tham khảo

Đỗ Duy Ngôn. **Chừng nào giáo dục Việt Nam hội nhập**. NXB *Khoa học kĩ thuật*, H. 2008.

SUMMARY

The "embedded" soft-skills training on hard skills in the module/course is a very effective method, created interest in teaching professional. This is a content specific to soft skills. Soft skills make a vital role in shaping the personaliti of an individual. This is also the skills of each graduate student must have been to beyond the expertise in the application process.