TRI THỨC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH TRONG GIẢI TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

TS. NGUYỄN DANH NAM* - ThS. LA ĐỨC MINH**

Dạy học giải toán có vai trò đặc biệt trong dạy học toán mà chứng minh là một hoạt động giải toán. Các bài toán (BT) là một phương tiện hữu ích trong việc giúp học sinh (HS) nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng và kĩ xảo. Hoạt động giải toán là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích của dạy học toán. Do đó, tổ chức có hiệu quả quá trình dạy học giải toán có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán.

1. Nguyên lí phân tích đi lên và phân tích đi xuống

1) Nguyên lí phân tích đi lên. Trong hoạt động dạy học giải toán, đặc biệt là hoạt động chứng minh các kết quả toán học, việc sử dụng nguyên lí phân tích đi lên (hay suy ngược lùi) là cách chứng minh đi từ cái chưa biết đến cái đã biết, từ cái phải tìm đến cái đã cho. Xuất phát từ mệnh đề cần chứng minh để đi đến chân lí đã biết (thường là đơn giản hơn) mà những chân lí này liên kết với nhau tạo thành mệnh đề cần chứng minh.

Sơ đồ của nguyên lí phân tích đi lên được biểu diễn bằng phép suy diễn hợp logic có dạng: $T \leftarrow T_1 \leftarrow T_2 \leftarrow ... \leftarrow T_n$ (trong đó mệnh đề T_n là đúng). Do đó, giả sử cần chứng minh mệnh đề T là đúng, giáo viên (GV) cần truyền thụ cho HS một cách tường minh phương pháp chứng minh theo các bước sau:

Bước 1: Xuất phát từ mệnh đề T, xét xem T là hệ quả logic của mệnh đề T_1 nào đó hay không (sơ đồ $T \leftarrow T_1$).

Bước 2: Xuất phát từ mệnh đề T_1, xét xem T_1 là hệ quả logic của mệnh đề T_2 nào đó hay không (sơ đồ $T \leftarrow T_2$).

Bước 3: Tìm mệnh đề T_n đã biết là đúng. Từ đó, dựa vào sơ đồ phân tích đi lên ($T \leftarrow T_1 \leftarrow T_2 \leftarrow ... \leftarrow T_n$) để chứng minh mệnh đề T ban đầu.

Sử dụng phương pháp phân tích đi lên có ưu điểm là tạo điều kiện cho HS tìm tòi, xây dựng các bước chứng minh kết quả BT một cách tự nhiên và logic; đồng thời, giúp các em có cơ hội được thường xuyên sử dụng phương pháp gợi mở, đàm thoại trong quá trình giải toán. Tuy nhiên, khi trình bày cách chứng minh bằng phương pháp phân tích đi lên có hạn chế là thường dài dòng, mất nhiều thời gian.

Như vậy, trong quá trình truyền thụ cho HS tri thức phương pháp (TTPP) chứng minh bằng phương pháp đi lên, GV có thể cho HS những chỉ dẫn, gợi ý, chẳng hạn: Để chứng minh mệnh đề T, ta cần chứng minh điều gì? Để chứng minh T_1, cần chứng minh điều gì? Để chứng minh mệnh đề T_2, cần chứng minh điều gì?... Từ đó, HS sẽ rút ra cách chứng minh sử dụng nguyên lí phân tích đi lên để tìm ra mệnh đề T_n đúng, HS có thể tự trình bày lại cách chứng minh theo sơ đồ sau:

$T_n \rightarrow T_{n-1} \rightarrow ... \rightarrow T_1 \rightarrow T$ (1)

2) Nguyên lí phân tích đi xuống. Khi sử dụng phương pháp chứng minh bằng nguyên lí phân tích đi xuống (hay suy ngược tiến) là cách chứng minh đi từ cái đã biết đến cái chưa biết, từ cái đã cho đến cái phải tìm, liên kết logic những chân lí đã biết với nhau để đi đến một chân lí mới.

Sơ đồ của phương pháp này được biểu diễn bằng phép suy diễn hợp logic có dạng: $T \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow ... \rightarrow T_n$ (trong đó, mệnh đề T_n đã biết là đúng hay sai). Do đó, giả sử cần xác định tính đúng sai của mệnh đề T, GV có thể truyền thụ cho HS cách chứng minh theo các bước:

Bước 1: Xuất phát từ mệnh đề T, ta suy luận theo sơ đồ sau: $T \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow ... \rightarrow T_n$ (2)

Bước 2: Nếu T_n sai, kết luận T sai. Nếu T_n đúng thì chuyển sang bước tiếp theo.

Bước 3: Nếu T_n đúng, ta chưa kết luận được gì về T. Khi đó, GV hướng dẫn HS kiểm tra sơ đồ ngược lại: $T_n \rightarrow T_{n-1} \rightarrow ... \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow T$, nếu suy luận đúng thì kết luận T đúng.

2. Hướng dẫn HS TTPP chứng minh bằng nguyên lí phân tích đi lên

TTPP là đối tượng trung tâm của một tình huống dạy học cụ thể, kết quả là tri thức được trình bày một cách tổng quát và tường minh dưới dạng một quy tắc, thuật toán hay tập hợp những câu hỏi, chỉ dẫn...

* Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên
** Viện Dân tộc - Ủy ban Dân tộc

Ở cấp độ này, GV cần rèn luyện cho HS các hoạt động dựa trên TTPP được phát biểu một cách tổng quát và thực hành theo mẫu. Trong từng bước suy luận, GV cần giúp HS biết sử dụng phương tiện ngôn ngữ diễn tả sơ đồ chứng minh bước đó, hướng dẫn các em cách chứng minh sơ đồ là đúng. GV có thể trang bị TTPP chứng minh bằng nguyên lí phân tích đi lên theo quy trình (1) ở trên.

Ví dụ 1: Cho hai cặp số (a_1, a_2,...a_n); (b_1, b_2,...b_n). Chứng minh rằng:

$(a_1b_1+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2)$ (mệnh đề T)

Với BT này, nếu chúng ta tiếp cận theo phương pháp chứng minh trực tiếp thì sẽ tương đối khó. GV có thể hướng dẫn HS như sau: với hai cặp số thực (a_1, a_2,...a_n); (b_1, b_2,...b_n) và $\forall x \in R$, ta luôn có: $(a_1x+b_1)^2 + ... + (a_nx+b_n)^2 \ge 0 \quad \Rightarrow (a_1^2+...+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+... + a_nb_n)x + (b_1^2+...+b_n^2) \ge 0 (*)$

Dễ thấy: $(a_1^2+...+a_n^2) \ge 0$. Nếu $(a_1^2+...+a_n^2) = 0$, $\Rightarrow a_1 = ... = a_n = 0$ bất đẳng thức (*) luôn đúng nên (T) luôn đúng. Nếu $(a_1^2+...+a_n^2) > 0$, tam thức bậc hai:

$f(x) = (a_1^2+...+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+...+a_nb_n)x + (b_1^2+...+b_n^2)$

có $\Delta' = (a_1b_1+...+a_nb_n)^2 - (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2) \le 0$

$\Rightarrow (a_1b_1+...+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2)$.

Đối với BT ở *ví dụ 1*, việc truyền thụ TTPP chứng minh cho HS theo nguyên lí phân tích đi lên được thực hiện như sau:

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
Em hãy cho biết để chứng minh (T), ta cần chứng minh điều gì?	Để chứng minh (T), ta cần chứng minh: $(a_1b_1+...+a_nb_n)^2 - (a_1^2+...+a_n^2)(b_1^2+...+b_n^2) \le 0$ (mệnh đề T_1)
Em có nhận xét gì về bất đẳng thức (T_1)?	Vế trái của bất đẳng thức (T_1') có dạng b^2-ac, đó chính là định thức $\Delta' = b^2 - ac$ của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2+2bx+c$, với: $a = (a_1^2+...+a_n^2)$; $b = (a_1b_1+...+a_nb_n)$; $c = (b_1^2+...+b_n^2)$.
Vậy, để chứng minh mệnh đề (T_1), cần chứng minh điều gì?	Cần chứng minh: $f(x) = (a_1^2+...+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+...+a_nb_n)x + (b_1^2+...+b_n^2) \ge 0$, với $\forall x \in R$ (mệnh đề T_2)
Em hãy chứng minh mệnh đề T_2?	$f(x) = (a_1^2+...+a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1+...+a_nb_n)x + (b_1^2+...+b_n^2) = (a_1x+b_1)^2+...+(a_nx+b_n)^2$ Nên $f(x) = (a_1x+b_1)^2+...+(a_nx+b_n)^2 \ge 0, \forall x$. $\Rightarrow$ (T) đã được chứng minh.

3. Hướng dẫn HS TTPP chứng minh bằng *nguyên lí phân tích đi xuống*

Việc truyền thụ cho HS TTPP chứng minh bằng nguyên lí phân tích đi xuống cần được cài đặt bằng các hoạt động ăn khớp với các bước của sơ đồ (2) ở trên; từ đó, GV hướng dẫn HS quy trình của nguyên lí phân tích đi xuống khi chứng minh một BT.

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác *S.ABCD* có đáy là hình vuông, cạnh bằng *a*. Tam giác đều *SAD* nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy *ABCD*. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của các cạnh *SB, BC, CD, AD*. Chứng minh rằng $AM \perp BP$ (*hình 1*).

Do tam giác SAD đều nên SQ $\perp$ AD. Vì (SAD) $\perp$ (ABCD) => SQ $\perp$ (ABCD) => SQ $\perp$ BP.

Hai tam giác BPC và CQD bằng nhau, nên ta có:

$\angle PBC = \angle QCD$

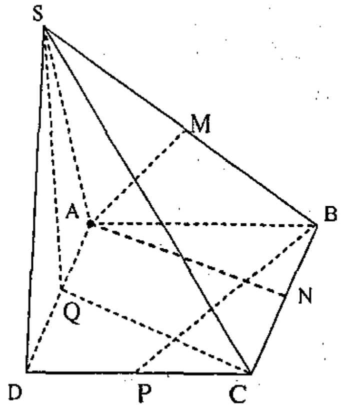
$\Rightarrow \angle PBC + \angle QCB = \angle QCD + \angle QCB = 90^0$

=> BP $\perp$ CQ => BP $\perp$ (SQC).

Do QC // AN; MN //SC suy ra (SQC) // (MAN).

Từ đây, suy ra: BP $\perp$ (MAN) => AM $\perp$ BP.

Với BT này, GV có thể yêu cầu HS giải quyết BT theo sơ đồ (2) thông qua việc dẫn dắt bằng hệ thống câu hỏi:



Hình 1

Hoạt động của GV	Hoạt động của HS
$AM \perp BP$ cho em kết luận gì? *AM có thể* vuông góc với mặt phẳng nào chứa *BP* không?	$BP \perp (MAN)$
$BP \perp (MAN)$ thì *BP* vuông góc với mặt phẳng nào?	$BP \perp (SQC)$
$BP \perp (SQC)$ thì em có kết luận gì?	$BP \perp CQ, SQ \perp BP$
	HS có thể đưa ra quy trình phân tích đi xuống theo sơ đồ (2) như sau: $AM \perp BP(T) \Rightarrow (T_1) BP \perp (MAN) \Rightarrow (T_2)$ $BP \perp (SQC) \Rightarrow (T_3)$ $BP \perp CQ, SQ \perp BP$.
Em hãy cho những lí giải về tiến trình này?	HS dễ dàng lí giải được: Từ $AM \perp BP \Rightarrow BP \perp (MAN)$ luôn đúng vì có $AM \perp BP$ và $MN \perp BP$; $BP \perp (SQC)$ luôn đúng vì $(SQC) // (MAN)$. Từ đó, suy ra: $BP \perp CQ, SQ \perp BP$.

Đến đây, phần lớn HS nhầm tưởng BT đã được chứng minh xong mà không kiểm tra quy trình ngược lại: $(T_3)\ BP \perp CQ, SQ \perp BP \Rightarrow (T_2)\ BP \perp (SQC) \Rightarrow (T_1) BP \perp (MAN) \Rightarrow AM \perp BP (T)$ xem có đúng hay không, sau đó mới kết luận. Với sơ đồ này, HS dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn của nó.

Như vậy, sử dụng nguyên lí phân tích đi xuống có ưu điểm là cách trình bày chứng minh thường ngắn gọn, sáng sủa và thuận lợi trong việc phát triển tư duy sáng tạo ở HS. Tuy nhiên, trình bày chứng minh theo nguyên lí này không tự nhiên, khó thấy được lí do của điểm xuất phát, khó giải thích được các phép biến đổi, các thủ thuật, hình vẽ phụ... Hơn nữa, GV thường phải thuyết trình nhiều, hướng dẫn HS sử dụng phương pháp suy ngược tiến để tìm ra hướng giải quyết vấn đề và dùng phương pháp suy ngược lùi để trình bày vấn đề đó.

* * *

Đối với một BT chứng minh theo định hướng trực tiếp, cần xuất phát từ các tiền đề, áp dụng quy tắc suy diễn hợp logic để suy ra tính đúng đắn của vấn đề cần chứng minh. Tuy nhiên, phương pháp phân tích đi lên cho phép tìm ra mệnh đề T_n đúng đã biết, cơ sở của phương pháp này là muốn chứng minh T, ta cần chứng minh T_1; muốn chứng minh T_1, cần chứng minh T_2... Như vậy, GV hướng dẫn HS sử dụng phương pháp phân tích đi lên để xác định các bước chứng minh BT, trong khi đó, HS sử dụng phương pháp phân tích đi xuống để bác bỏ mệnh đề hoặc tìm ra mệnh đề xuất phát và trình bày lời giải cho BT. Việc kết hợp linh hoạt khi sử dụng phương pháp phân tích đi lên và phân tích đi xuống sẽ giúp HS tìm tòi con đường chứng minh kết quả một BT một cách hiệu quả. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Hoàng Chúng - Võ Ứng Đoài - Nguyễn Văn Bàng. **Phương pháp tổng quát giảng dạy toán học ở trường phổ thông**. NXB *Giáo dục*, H. 1960.
2. Nguyễn Thái Hòe. **Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán**. NXB *Giáo dục*, H. 1997.
3. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2006.
4. Bùi Văn Nghị. **Vận dụng lí luận vào thực tiễn dạy học môn Toán ở trường phổ thông**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2009.
5. G. Polya. **Giải bài toán như thế nào?** NXB *Giáo dục*, H. 1975.
6. Lê Văn Tiến. **Phương pháp dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông** (các tình huống dạy học điển hình). NXB *Đại học quốc gia TP. Hồ Chí Minh*, 2005.

SUMMARY

There is no specific method for solving a mathematical problem. Exploring and discovering activities during proving process play an important and effective role in finding the proving strategies and techniques. In order to show the truth of a mathematical problem, we can use direct proof or indirect proof methods which depend on the requirements and characteristics of the problem. In this paper, we present the way to transfer methodlogical knowledge for problem solving and performing proofs by exploiting and using the logical structures of top-down and bottom-up analysis methods.

Tư tưởng Hồ Chí Minh về...

(Tiếp theo trang 24)

định hướng xã hội chủ nghĩa, mở rộng giao lưu hợp tác quốc tế, tiến hành công nghiệp hoá, hiện đại hoá đất nước, giữ vững ổn định chính trị và đảm bảo an ninh quốc gia. Với tinh thần độc lập, tự chủ, sáng tạo, trên cơ sở tiếp thu những thành tựu của cộng đồng thế giới và kinh nghiệm đã trải qua là cơ sở quan trọng để Đảng Cộng sản Việt Nam đề ra chủ trương, đường lối phù hợp với tình hình thực tiễn ở nước ta hiện nay.

Việc quán triệt tư tưởng Hồ Chí Minh về ĐLDT gắn liền với CNXH, xác định những bước đi và cách làm, tìm được những giải pháp thiết thực phù hợp với thực tiễn Việt Nam là điều kiện đảm bảo cho sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước thành công. Chúng ta tin tưởng rằng, dưới sự lãnh đạo sáng suốt của Đảng, kiên trì ĐLDT và CNXH, sự nghiệp xây dựng và bảo vệ Tổ quốc xã hội chủ nghĩa của chúng ta sẽ ngày càng đạt được những thành tựu to lớn và Việt Nam ngày càng có vị trí quan trọng trong xu thế hội nhập khu vực và quốc tế.❑

(1) Hồ Chí Minh. **Toàn tập** (tập 4). NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1995.
(2) Hồ Chí Minh. **Toàn tập** (tập 9). NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1995.
(3) Hồ Chí Minh. **Toàn tập** (tập 3). NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1995.
(4) Hồ Chí Minh. **Toàn tập** (tập 4). NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1996.
(5) Đảng Cộng sản Việt Nam. **Nghị quyết Hội nghị lần thứ sáu Ban Chấp hành Trung ương Đảng khoá VI**. NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1998.
(6) Đảng Cộng sản Việt Nam. **Cương lĩnh xây dựng đất nước trong thời kì quá độ lên chủ nghĩa xã hội**. NXB *Sự thật*, H. 1995.
(7) Đảng Cộng sản Việt Nam. **Văn kiện đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ VIII**. NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1996.
(8) Hồ Chí Minh. **Toàn tập** (tập 10). NXB *Chính trị quốc gia*, H. 1996.

SUMMARY

In Ho Chi Minh's ideology system, the idea of national independence associated with socialism is a central point which has complete penetration in the whole system of his thought over the periods and fields . This article presents Ho Chi Minh 's thoughts about national independence and the application of that idea of the Communist Party of Vietnam in current period.