PHÂN TÍCH CÁC BIỂU HIỆN SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI THỰC HIỆN CÁC THAO TÁC TƯ DUY CƠ BẢN TRONG DẠY HỌC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH

ThS. NGUYỄN THỊ MỸ HẰNG*

Trong dạy học toán ở phổ thông, đã có rất nhiều quan điểm và ý kiến nêu ra về những sai lầm của học sinh (HS) khi giải các bài tập toán. Chẳng hạn, I. A. Komensky đã khẳng định: "Bất kì một sai lầm nào cũng có thể làm cho HS học kém đi nếu như giáo viên (GV) không chú ý ngay tới sai lầm đó, bằng cách hướng dẫn HS tự nhận ra và sửa chữa, khắc phục sai lầm". Thực tiễn cho thấy, chất lượng dạy học toán ở trường phổ thông đã quan tâm đến việc phát hiện và sửa chữa sai lầm cho HS; tuy nhiên, khả năng giải toán của các em vẫn còn hạn chế do mắc những sai lầm dẫn đến sai lầm nối tiếp sai lầm. Hầu hết các sai lầm của HS trong quá trình giải toán đều do phân tích (PT) sai giả thiết của bài toán hoặc thực hiện các thao tác tư duy không chính xác. Bài viết đưa ra một số sai lầm của HS khi thực hiện các thao tác tư duy cơ bản như: PT, tổng hợp (TH), so sánh, tương tự hóa, trừu tượng hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa; trong đó, PT và TH là hai thao tác trái ngược nhau nhưng lại là hai mặt của một quá trình thống nhất đó là cùng mục tiêu phát triển tư duy cho HS, các thao tác trí tuệ khác được diễn ra dựa trên nền tảng PT và TH.

1. Sai lầm trong phân tích, tổng hợp

HS thường PT sai bản chất của khái niệm, mối liên hệ giữa các khái niệm; vận dụng không chính xác giả thiết để suy luận thành kết luận của định lí; không hiểu được các bước lập luận trong quá trình chứng minh các kết quả toán học, hiểu chưa đúng bản chất nên việc vận dụng kiến thức vào giải bài tập chưa chặt chẽ.

Ví dụ: PT ứng dụng tính đơn điệu của hàm số chúng ta thu được kết quả: *"Nếu hàm số f(x) đơn điệu trên a; b) thì từ f(x) = f(y), với x, y ∈ (a; b) sẽ tương đương với x = y"*. Tuy nhiên, do không nắm vững bản chất dẫn tới HS chỉ nắm được: "Nếu hàm số *f(x)* đơn điệu thì f(x) = (f(y) ⇔ x = y" mà không chỉ rõ f là hàm số đơn điệu trên (a;b) và x,y ∈ (a;b); từ đó, HS đã mắc sai lầm khi giải toán. Chẳng hạn, với hệ phương trình $\begin{cases} x^2-12xy+20y^2=0 & (1)\\ \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y & (2)\end{cases}$, HS giải như sau: điều kiện của bài toán là: x > -1; y > -1.

Phương trình (2) tương đương với: ln (a+x) - x = ln(1+y) - y (3). Xét hàm số *f(t)* = ln (1+*t*) - *t* có đạo hàm là $f'(t)=\frac{-t}{t+1}$.

Trường hợp 1: Với t ∈(-1;0) ⇒ *f'(t)* > 0 ⇒ *f(t)* đồng biến. Từ (3) suy ra *f(x)* = *f(y)* ⇔ *x* = *y*. Do đó, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x^2-12xy+20y^2=0\\ x=y\end{cases}$, hệ này vô nghiệm trên (-1; 0).

Trường hợp 2: Với t ∈ [0; ∞) ⇒ *f'(t)* ≤ 0 ⇒ *f(t)* nghịch biến. Tương tự, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ sau: $\begin{cases} x^2-12xy+20y^2=0\\ x=y\end{cases}$, hệ này có nghiệm $\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}$.

Vậy, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}$.

Mặc dù đáp số của bài toán trong ví dụ trên là đúng nhưng phần lí luận chưa chính xác. Việc xét cả *x* và *y* cùng trên một miền chưa được lí giải một cách rõ ràng. Lời giải đúng là: từ (1) suy ra x = 2y hoặc x = 10y; suy ra nếu hệ phương trình có nghiệm (x; y) thì xy ≥ 0, nếu x = 0 thì y = 0. Do đó, xét 3 trường hợp: x = y = 0; x > 0, y > 0; x < 0, y < 0 (mấu chốt ở đây là từ (1) có thể suy ra *x* và *y* cùng dấu). Nguyên nhân dẫn đến sai lầm của HS là do các em chưa nắm vững nội dung kiến thức: "Nếu hàm số f(x) đơn điệu trên (a; b) thì từ f(x) = f(y), với x, y ∈ a; b) sẽ tương đương với x = y". GV cần lưu ý cho HS rằng, khi nói hàm số đồng biến, nghịch biến thì luôn phải gắn với tập xác định, nghĩa là đồng biến, nghịch biến trên khoảng nào. Khi giải hệ phương trình, *x* và *y* chưa hẳn đã cùng thuộc một miền, còn nếu chúng thuộc một miền thì cần có sự lí giải xác đáng.

* Khoa Toán, Trường Đại học Vinh

2. Sai lầm trong so sánh

Khi giải toán, đôi khi HS PT giả thiết của bài toán sai dẫn tới không tìm được hoặc tìm sai dấu hiệu chung, những điểm giống nhau của các dữ kiện và không hiểu được mục đích nhận thức của việc so sánh (so sánh để làm gì, so sánh như thế nào) nên liệt kê một cách không có hệ thống các dấu hiệu của các đối tượng được so sánh mà không rút ra được kết luận nào là cần thiết và cơ bản nhất.

Ví dụ: So sánh hai cách giải của bài toán sau: *Một nhóm HS 15 em gồm 7 HS nữ và 8 HS nam. Có bao nhiêu cách chọn 5 HS trong nhóm sao cho có ít nhất một HS nữ.*

Cách 1: Chọn 5 HS có ít nhất một HS nữ xảy ra các trường hợp sau: - 1 HS nữ và 4 HS nam, số cách chọn là: $C_7^1C_8^4 = 490$; - 2 HS nữ và 3 HS nam, số cách chọn là: $C_7^2C_8^3 = 1176$; - 3 HS nữ và 2 HS nam, số cách chọn là: $C_7^3C_8^2 = 980$; - 4 HS nữ và 1 HS nam, số cách chọn là: $C_7^4C_8^1 = 280$; - 5 HS nữ, số cách chọn là: $C_7^5 = 21$.

Khi đó, số cách chọn thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $C_7^1C_8^4 + C_7^2C_8^3 + C_7^3C_8^2 + C_7^4C_8^1 + C_7^5 = 2947$.

Cách 2: Số cách chọn 5 HS bất kì trong nhóm là: C_{15}^5; số cách chọn 5 HS không có HS nữ nào (hay toàn HS nam) là: C_8^5. Suy ra số cách chọn 5 HS có ít nhất một HS nữ là: $C_{15}^5 - C_8^5 = 2947$.

HS so sánh và chỉ thấy được cả hai cách giải đều đúng, các cách giải khác nhau nhưng cùng cho một đáp số. Tuy nhiên, GV cần giúp HS nắm được vấn đề ở đây là nên lựa chọn cách giải nào khi đứng trước một bài toán đếm? Khi nào thì lựa chọn cách 1 (đếm trực tiếp), khi nào thì lựa chọn cách 2 (đếm gián tiếp)? GV có thể hướng HS vào mục đích so sánh trong trường hợp này là việc lựa chọn cách giải phù hợp. Nếu đếm số phần tử trong tập A có tính chất T là khó khăn vì phải xét quá nhiều trường hợp dẫn tới có thể mắc sai lầm là đếm thừa, đếm thiếu; khi đó, ta sẽ đếm số phần tử trong A không có tính chất T, sau đó lấy số phần tử của A trừ đi số vừa đếm được ta sẽ thu được đáp số. Một trong những dấu hiệu để nhận biết cách giải theo cách đếm gián tiếp thường là trong đề bài có yêu cầu "có ít nhất một phần tử thỏa mãn điều kiện nào đó".

3. Sai lầm trong tương tự hóa

Trong học tập, HS rất hay sử dụng thao tác tương tự hóa nhưng các em đôi khi không hiểu rằng tương tự hóa chỉ mang tính dự đoán, mọi kết quả của tương tự hóa đều phải chứng minh mới khẳng định được tính đúng đắn của nó. Chẳng hạn như việc chuyển các phép biến đổi của phương trình sang phép biến đổi của bất phương trình; chuyển từ việc giải bài tập này sang giải bài tập khác cùng dạng; chuyển từ các phép biến đổi của dãy số sang phép biến đổi của hàm số,... thì không phải tất cả các thao tác đó đều đúng. Tuy nhiên, nhiều HS đã mặc nhiên công nhận các kết quả tương tự đó. Dưới đây, chúng ta PT một số sai lầm của HS thông qua các ví dụ sau:

Ví dụ: Tìm điều kiện cần và đủ để bất phương trình có nghiệm.

Có HS giải như sau: Điều kiện cần và đủ để bất phương trình $ax^2 + bx + c \geq 0, (a \neq 0)$ có nghiệm là $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$.

HS đã áp dụng tương tự điều kiện có nghiệm của bất phương trình bậc hai như đối với phương trình bậc hai. Trong trường hợp này, điều kiện $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ chỉ là điều kiện đủ chứ không phải là điều kiện cần để bất phương trình $ax^2 + bx + c \geq 0, (a \neq 0)$ có nghiệm. Chẳng hạn, đối với bất phương trình $x^2 + x + 1 \geq 0$, biệt thức $\Delta = -3 < 0$ nhưng bất phương trình có nghiệm với mọi x.

Khi dạy học chủ đề *Phương trình* và chủ đề *Bất phương trình* có nhiều nét tương tự nhau, tuy nhiên không phải sự tương tự nào cũng đúng. Chẳng hạn, HS thường ngộ nhận về những phép biến đổi sau (chú ý rằng các phép biến đổi sau đối với phương trình là đúng đắn): $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$; $\dfrac{1}{f(x)} > \dfrac{1}{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > f(x) \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$;

$|f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$; $|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq -g(x) \end{array}\right.$;

$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$; $a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$;

$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$.

Do đó, khi dạy học chủ đề bất phương trình, GV phải hình dung trước những sai lầm HS có thể mắc phải để khắc phục kịp thời cho các em.

4. Sai lầm trong khái quát hóa

Để khái quát hóa tốt, điều quan trọng nhất là HS phải tìm ra được dấu hiệu chung và bản chất của các đối tượng riêng lẻ. Một trong những biểu hiện sai lầm của HS là *không tìm được dấu hiệu bản chất, ngộ nhận giữa dấu hiệu chung và dấu hiệu bản chất* (trừu tượng hoá sai); *không tiên lượng được một số trường hợp suy biến của cái tổng quát...*

Ví dụ: Khi dạy học khái niệm giới hạn của hàm số

(Xem tiếp trang 59)

thời gian cho cả người dạy và người học, mà còn làm sinh động bài học, tạo được hứng thú học tập cho người học.

4. Đổi mới khâu kiểm tra - đánh giá kết quả học tập của người học

Trong quá trình kiểm tra - đánh giá, nếu nhận thấy kết quả làm bài của SV chưa tốt, người dạy có thể điều chỉnh phương pháp dạy và người học điều chỉnh phương pháp học cho phù hợp để đạt được mục tiêu dạy học đã đề ra.

Phương pháp kiểm tra đánh giá cần phù hợp, với các hình thức phong phú (tự luận hay trắc nghiệm khách quan, kiểm tra viết hay vấn đáp, kiểm tra cá nhân hay theo nhóm...). Trong quá trình thực hiện chương trình môn Tin học, chúng tôi đã thực hiện kế hoạch kiểm tra - đánh giá thường xuyên thông qua các bài tập, bài thực hành và các chuyên đề cụ thể.

Đối với bài thi kết thúc môn học, chủ yếu tổ chức cho SV thi bằng hình thức thực hành. Tuy nhiên, nội dung kiểm tra - đánh giá cần phải bao quát được nội dung chủ yếu của môn học, tránh tình trạng đánh giá không đúng kết quả học tập của SV. Ngoài ra, kế hoạch kiểm tra - đánh giá không chỉ chú ý đến kiến thức, mà còn phải quan tâm cả các kĩ năng (kĩ năng thu thập và xử lí thông tin, kĩ năng tính toán, kĩ năng phân tích, tổng hợp...). ❑

Tài liệu tham khảo

1. Debbie Candau - Jennifer Doherty - Robert Hannafin - John Judge - Judi Yost - Paige Kuni. **Intel teach to the future** (Chương trình dạy học cho tương lai của Intel). NXB *Thanh niên*, 2007.
2. Nguyễn Thế Hưng - Hoàng Văn Hải. "Phát triển các kĩ năng nghiên cứu khoa học cho học sinh thông qua dạy học theo dự án". *Tạp chí Giáo dục*, số 274/2011.
3. Trần Đình Long. **Lí thuyết hệ thống.** NXB *Khoa học và kĩ thuật*, H. 1999.
4. Lê Đức Long. Tài liệu biên soạn Phương pháp dạy môn Tin học. *Đại học sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 2006.

SUMMARY

This paper presents a system of effective measures to enhance the quality of education in informatics at Hanoi University of Natural Resources and Environment. These measures have totally reformed several elements of the teaching process: curriculum, teachers, detailed course outline, teaching methods and methods of assessing the academic performance of learners. Survey results show that these measures have brought remarrkable training results in a positive direction.

Phân tích các biểu hiện sai lầm...

(Tiếp theo trang 44)

tại một điểm, trong sách giáo khoa thường bắt đầu bằng ví dụ xét một hàm hữu tỉ có dạng $\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó, g(x) là hàm số không xác định tại $x = x_0$ nào đó. Ví dụ, trong **Đại số và Giải tích 11** (nâng cao) xét hàm số được cho bởi công thức $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-2}$. Sau khi PT việc lấy mọi dãy số $x_1, x_1, ... x_n$... mà $x_n \neq 2, \forall n \in N^*$ sao cho $\lim x_n = 2$, lúc đó ta có $\lim f(x_n) = 8$. Khi đó, ta nói hàm số *f* có giới hạn là 8 khi *x* dần đến 2. HS sẽ chỉ ra các đặc điểm trong ví dụ ở trên là: kết quả của giới hạn không phụ thuộc vào công thức *f(x)*, *f(x)* không xác định tại giá trị mà *x* dần tới. Từ đó nhận thức sai lầm là giới hạn của hàm số cho bởi công thức *f(x)* khi *x* dần tới điểm nào thì tại điểm đó hàm số phải không xác định. Sai lầm ở đây là do HS đã ngộ nhận dấu hiệu $f(x)=\frac{2x^2-8}{x-2}$ không xác định tại x = 2 thành dấu hiệu bản chất.

***

Trong dạy học môn *Toán*, GV cần tìm cách hạn chế các nguyên nhân gây ra sai lầm của HS ngay cả khi sai lầm chưa xuất hiện. GV cần dự đoán trước những sai lầm HS có thể gặp phải khi dạy học từng chủ đề để có những biện pháp nhằm hạn chế, sửa chữa cho các em; đặc biệt, HS không được sử dụng những khái quát không có suy luận, những phép tương tự không có cơ sở. Nếu GV có các phương pháp dạy học phù hợp sẽ khắc phục được sai lầm của HS trong quá trình giải toán. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim (chủ biên). **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2004.
2. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên). **Đại số và giải tích 11.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2011.

SUMMARY

Basic logical operations include analysis, synthesis, comparison, similarization, abstraction and generalization. Analysis and synthesis are two conflicting operations but are two sides of a single process; abstraction is necessary condition of generalization. In this paper, we have analyzed the manifestations of high school pupils' mistakes in performing basic logical operations. For each operation, we present some common mistake manifestations and examples.