

# RÈN LUYỆN THAO TÁC TƯ DUY PHÂN TÍCH VÀ TỔNG HỢP CHO HỌC SINH LỚP 9 THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP VẼ THÊM HÌNH PHỤ

ThS. BẠCH PHƯƠNG VINH\*

Một bài toán (BT) hình học có thể có nhiều cách giải khác nhau, nhưng có những BT với dữ kiện đã cho học sinh (HS) có thể gặp bế tắc, không tìm ra cách giải nếu không vẽ thêm hình phụ. Đối với những BT đó, việc vẽ thêm hình phụ giúp HS tìm được lời giải dễ dàng và thuận lợi hơn, thậm chí có BT phải vẽ thêm hình phụ mới tìm được lời giải. Vấn đề đặt ra là liệu có phương pháp (PP) vẽ thêm hình phụ chung cho các BT hình học hay không, vẽ thêm hình phụ như thế nào để thuận lợi cho việc giải toán và phát triển tư duy cho HS? Để tạo ra được một hình phụ liên kết tường minh các mối quan hệ toán học giữa điều kiện đã cho (giả thiết) với điều kiện phải tìm (kết luận), đòi hỏi HS phải thực hiện các thao tác tư duy: phân tích (PT), tổng hợp (TH), so sánh, tương tự hoá, đặc biệt hoá, khái quát hoá...; trong đó, thao tác tư duy phân tích và tổng hợp (PTVTH) giữ vai trò nền tảng. Giáo viên (GV) cần trang bị cho HS những kiến thức, kĩ năng cần thiết và các biện pháp PT để tìm cách vẽ hình phụ phù hợp cho mỗi BT; từ đó, HS có thể chủ động tìm được hướng giải quyết vấn đề và rèn luyện các thao tác tư duy PTVTH.

## 1. Phân tích và tổng hợp

*"PT là dùng trí óc chia cái toàn thể ra thành từng phần, hoặc tách ra từng thuộc tính hay khía cạnh riêng biệt nằm trong cái toàn thể đó"; "TH là dùng trí óc hợp lại các phần của cái toàn thể, hoặc kết hợp lại những thuộc tính hay khía cạnh khác nhau nằm trong cái toàn thể đó" (1). Theo Từ điển Tiếng Việt: "PT là phân chia thật sự hay bằng tưởng tượng một đối tượng nhận thức ra thành các yếu tố, trái với TH; TH là tổ hợp bằng tưởng tượng hay thật sự, các yếu tố riêng rẽ nào đó làm thành một chỉnh thể, trái với PT" (2). Theo Nguyễn Bá Kim: "PT là tách (trong tư tưởng) một hệ thống thành những vật, tách một vật thành những bộ phận riêng lẻ; TH là liên kết (trong tư tưởng) những bộ phận thành một vật, liên kết nhiều vật thành một hệ thống" (3).*

Có thể hiểu, trong hoạt động giải toán, PTVTH được thể hiện: PT BT là nêu rõ giả thiết (yếu tố đã cho) và

kết luận (yếu tố phải tìm), tìm mối liên hệ giữa chúng. Để giải quyết BT, ta có thể tách, chia BT thành từng trường hợp riêng lẻ, việc giải quyết từng vấn đề nhỏ sẽ dễ dàng hơn. TH các yếu tố, mối quan hệ giữa các yếu tố vừa PT chúng ta sẽ rút ra được kết luận mới; TH cách giải của các BT bộ phận, liên kết thành lời giải của BT ban đầu. PTVTH là hai thao tác tư duy trái ngược nhau, chúng là hai mặt đối lập của một quá trình thống nhất. Tuy nhiên, trong quá trình giải toán, HS có thể thực hiện liên tiếp các thao tác PTVTH để tìm lời giải, khai thác, phát triển BT. Qua đó, HS có thể nâng cao năng lực giải toán cho HS.

## 2. PP vẽ thêm hình phụ và một số loại hình phụ thường được sử dụng trong giải toán hình học

**1) Yêu cầu của việc vẽ thêm hình phụ.** Việc vẽ thêm hình phụ nhằm mục đích tìm cách giải BT, làm cho BT trở nên đơn giản hơn, giúp HS đưa ra được những lời giải hay, độc đáo. Muốn vậy, nó phải là kết quả của các hoạt động trí tuệ: PT, TH, tương tự... để gắn kết mối quan hệ giữa kiến thức đã có với giả thiết đã cho và kết luận phải tìm để giải quyết BT. Vẽ thêm hình phụ luôn phải tuân theo các phép dựng hình cơ bản và cần chú ý là không dựng hình phụ một cách tùy tiện mà phải lựa chọn cách dựng thích hợp, thỏa mãn các tính chất nào đó của BT.

**2) Một số loại hình phụ thường được sử dụng trong giải toán hình học:** - **Điểm:** trung điểm của đoạn thẳng; điểm chia trong hay chia ngoài đoạn thẳng đã cho theo một tỉ số thích hợp; giao điểm của các hình,...; - **Đoạn thẳng, đường thẳng, tia:** nối hai điểm cho trước; kéo dài một đoạn thẳng cho trước; từ một điểm cho trước, dựng đường thẳng song song (hoặc vuông góc) với một đường thẳng đã cho; dựng đường phân giác của một góc cho trước; dựng đường thẳng đi qua một điểm cho trước hợp thành với đường thẳng khác một góc bằng góc cho trước; từ một điểm cho trước dựng tiếp tuyến với đường tròn đã cho; dựng dây cung chung của hai đường tròn giao nhau; vẽ tia đối của một tia; dựng các đường đặc biệt trong

\* Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên

tam giác;...; - *Đa giác*: tam giác, tam giác đều, tứ giác, hình vuông, hình bình hành...; - *Đường tròn*: vẽ các đường tròn hoặc cung chứa góc đi qua các điểm đã cho; vẽ đường tròn tiếp xúc với một đường tròn hoặc đường thẳng đã cho; vẽ đường tròn nội hoặc ngoại tiếp đa giác.

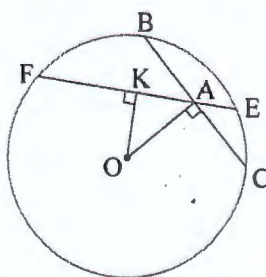
**3) Một số biện pháp PT tìm ra cách vẽ hình phụ thích hợp:** - *Đưa về các BT đã biết*: PT giả thiết, kết luận của BT, tìm ra các yếu tố tương đồng với kiến thức đã có của HS để xác định hình phụ thích hợp cần vẽ thêm, đưa BT cần giải quyết về BT quen thuộc; - *Tạo ra yếu tố trung gian*: PT kết luận của BT, tìm mối liên hệ giữa giả thiết với yếu tố trung gian để từ yếu tố trung gian suy ra kết luận; - *Biến đổi kết luận của BT đưa về mệnh đề tương đương*: PT biến đổi kết luận của BT thành các mệnh đề tương đương có khả năng gợi ra hướng vẽ hình phụ để giải BT; - *Dựa vào biến đổi đại số*: PT kết luận của BT, tìm mối liên hệ với các định lí, tính chất, công thức có liên quan, sau đó liên kết các mối quan hệ để xác định hình phụ cần vẽ.

### 3. Giải một số BT hình học bằng cách vẽ thêm hình phụ nhằm rèn luyện cho HS thao tác tư duy PTVTH

Có nhiều loại hình phụ trong giải toán hình học nên việc vẽ thêm hình phụ rất đa dạng, không theo khuôn mẫu nhất định nào. Do vậy, không có PP chung cho việc vẽ thêm hình phụ. Muốn vẽ được hình phụ thích hợp, thuận lợi cho quá trình giải toán đòi hỏi HS phải biết dự đoán tốt trên cơ sở các suy luận, có cái nhìn tổng quát, biết nhìn nhận BT một cách tổng thể dưới nhiều khía cạnh khác nhau, khai thác các dữ kiện tiềm ẩn trong các yếu tố đã cho của BT. Sau đó, liên kết mối quan hệ giữa các yếu tố đó và đưa ra lời giải, phát triển BT.

*Ví dụ 1:* Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên trong đường tròn. Vẽ dây BC vuông góc với OA tại A, vẽ dây EF bất kì đi qua A và không vuông góc với OA. Hãy so sánh độ dài hai dây BC và EF (*hình 1*).

*PT BT tìm cách giải:* Để so sánh độ dài hai đoạn thẳng không bằng nhau có rất nhiều cách, chẳng hạn: dựa vào quan hệ giữa cạnh và góc đối diện trong tam giác; quan hệ giữa đường xiên và hình chiếu; bất đẳng thức tam giác; quan hệ đường kính và dây cung; khoảng cách từ tâm đến dây trong đường tròn,...



Hình 1

Theo giả thiết,  $BC \perp OA$  tại A nên OA là khoảng cách từ tâm O đến dây BC. Điều này hướng cho HS suy nghĩ: muốn so sánh hai dây BC và EF có thể sử dụng kiến thức về khoảng cách từ tâm đến dây cung trong đường tròn. Dữ kiện của BT đã có khoảng cách từ tâm O đến dây BC, chưa có khoảng cách từ tâm O đến dây EF nên HS phải tạo ra yếu tố đó bằng cách kẻ  $OK \perp EF$  ( $K \in EF$ ).

Dựa vào quan hệ cạnh huyền với cạnh góc vuông trong tam giác OAK và khoảng cách từ tâm đến dây, HS dễ dàng suy ra được  $BC < EF$ . Do đó, *đường vuông góc OK hạ từ O đến dây EF là đường phụ cần vẽ.*

*Lời giải:* Vẽ  $OK \perp EF$  ( $K \in EF$ ). Tam giác AOK vuông tại K, có OA là cạnh huyền và OK là một cạnh góc vuông nên  $OA > OK$ . Theo định lí về khoảng cách từ tâm đến dây cung của đường tròn suy ra  $BC < EF$ .

TH lại các kết quả, ta có: EF là dây bất kì đi qua A và không vuông góc với OA, dây BC đi qua A và vuông góc với OA thì khi đó  $BC < EF$ . HS đi đến kết luận: trong các dây cung đi qua A, dây cung vuông góc với OA tại A có độ dài nhỏ nhất.

*Ví dụ 2:* Cho đoạn thẳng AB, hai đường thẳng d và d' lần lượt vuông góc với AB tại A và B. M là trung điểm của AB. Lấy C, D lần lượt trên d, d' sao cho  $\widehat{CMD} = 90^\circ$ . Chứng minh rằng CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB.

*PT các yếu tố của BT:* Để CD là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AB thì CD phải vuông góc với bán kính của đường tròn. Vì trong đề bài chưa xuất hiện bán kính đó của đường tròn nên ta cần tạo ra bằng cách kẻ  $MH \perp CD$  ( $H \in CD$ ) và chứng minh  $MH = MA$ .

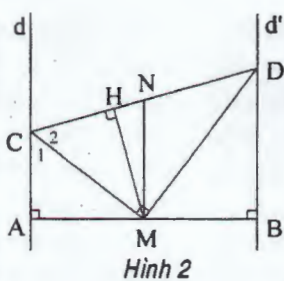
Muốn sử dụng tính chất về tiếp tuyến của đường tròn, ta phải chứng minh:  $\triangle AMC = \triangle HMC$ , nghĩa là phải có thêm yếu tố  $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ .

Với các dữ kiện của BT chưa đủ cho HS chứng minh, vì vậy, cần thông qua một góc trung gian bằng hai góc trên. Điều này hướng HS nghĩ đến việc tạo ra yếu tố trung gian bằng cách vẽ thêm hình phụ thích hợp để tìm cách giải (áp dụng biện pháp tạo yếu tố trung gian).

Từ giả thiết:  $\widehat{CMD} = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMD$  vuông. Theo tính chất: *trong tam giác vuông, trung tuyến xuất phát từ đỉnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền*, điều này gợi ý cho HS nghĩ đến việc tạo ra yếu tố trung gian bằng cách *vẽ điểm phụ N là trung điểm của CD* ( $\widehat{CMN}$  là yếu tố trung gian). Mặt khác, do  $d \parallel d'$  nên tứ giác ACDB là hình thang và M, N lần lượt

là trung điểm của AB, CD (hình 2).

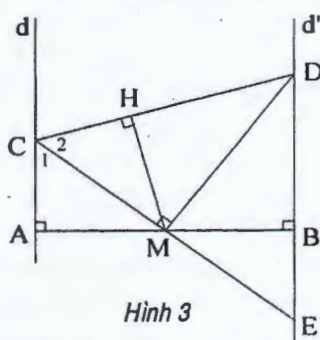
Khi đó, MN là đường trung bình của hình thang, suy ra  $MN \parallel d \parallel d'$  (cũng có thể vẽ thêm đường phụ bằng cách từ M kẻ  $MN \parallel d$ , sau đó suy ra N là trung điểm của CD) và  $\widehat{CMN} = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ .



Hình 2

**Cách 1:** TH kết quả của bước PT, ta có lời giải của BT như sau: Lấy N là trung điểm của CD, suy ra MN là đường trung bình của hình thang ABCD  $\Rightarrow MN \parallel d \Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{CMN}$  (so le trong) (1). Theo giả thiết  $\Delta CMD$  vuông tại M, có MN là đường trung tuyến  $\Rightarrow NC = NM \Rightarrow \Delta NCM$  cân tại N  $\Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{CMN}$  (2). Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ . Do đó:  $\Delta AMC = \Delta HMC \Rightarrow MH = MA$ .

**Cách 2:** Tiếp tục PT các yếu của đề bài, ta có: theo giả thiết, M là trung điểm của AB,  $d \parallel d'$  nên ta sẽ tạo ra góc trung gian bằng hai góc  $\widehat{C}_1$  và  $\widehat{C}_2$  thông qua việc kéo dài CM cắt  $d'$  tại E ( $\widehat{DEC}$  là góc trung gian được tạo ra từ tam giác cân đỉnh D có cạnh bên DC, cạnh đáy chứa CM). Vậy, E là điểm cần vẽ thêm (hình 3).

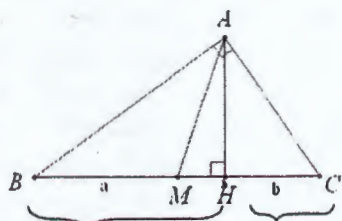


Hình 3

Kéo dài CM cắt  $d'$  tại E, ta có  $MC = ME$ . Theo giả thiết  $CM \perp MD \Rightarrow \Delta DCE$  cân tại D (vì có DM vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến)  $\Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{DEC}$  và  $\widehat{C}_1 = \widehat{DEC}$  (so le trong)  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ .

**Ví dụ 3:** Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Cho biết  $BH = a$ ,  $HC = b$ . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \text{ (hình 4).}$$



Hình 4

**PT BT tìm cách giải:** Để giải BT, HS

cần tìm mối liên hệ giữa các biểu thức ở hai vế của bất đẳng thức với các yếu tố trong BT và biến đổi các biểu thức ở hai vế. Xét vế phải của bất đẳng thức cần chứng minh, ta có:  $\frac{a+b}{2} = \frac{BC}{2}$ , gọi HS nghĩ đến trung tuyến AM của ABC vuông tại A, khi đó:  $AM = \frac{a+b}{2}$ ,  $AH = \sqrt{ab}$  và  $AH \leq AM$ .

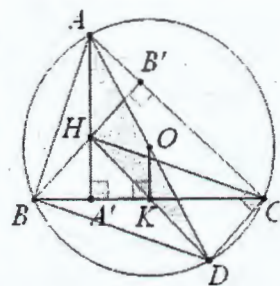
TH các kết quả trên suy ra điều phải chứng minh. Vậy, hình phụ cần vẽ là đường trung tuyến AM của  $\Delta ABC$  (M là trung điểm của BC). Ta đi đến lời giải BT.

**Lời giải:** Dựng đường trung tuyến AM (M là trung điểm của BC) của  $\Delta ABC$ .  $\Delta ABC$  vuông tại A, có AH là đường cao, AM là đường trung tuyến nên:

$$AH \leq AM \text{ và } AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH = \sqrt{ab}; AM = \frac{BC}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

**Ví dụ 4:** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O; R). Gọi H là trực tâm của tam giác, kẻ  $OK \perp BC$ , ( $K \in BC$ ). Chứng minh  $AH = 2OK$  (hình 5).

**PT các yếu tố trong BT và mối liên hệ với những điều đã biết:** Đẳng thức  $AH = 2OK$  giúp HS liên tưởng đến kiến thức về đường trung bình của tam giác có một cạnh là AH, O là trung điểm của một cạnh, K là trung điểm của cạnh kia (cần xác định tam giác này). Xét yếu tố điểm O là tâm của đường tròn và là trung điểm của một đoạn thẳng thì đoạn thẳng đó phải là đường kính, nên ta kẻ đường kính AD đi qua O, nối HD. BT phải chứng minh K là trung điểm của HD. Ta có K là trung điểm của BC (theo giả thiết  $OK \perp BC$ ), nếu K là trung điểm của HD thì tứ giác BDCH là hình bình hành. Nối BD, DC ta được tứ giác BDCH.



Hình 5

**Lời giải:** Kẻ đường kính AD, nối HD. Xét  $\Delta AHD$  có O là trung điểm của AD, theo giả thiết  $OK \perp BC \Rightarrow K$  là trung điểm của BC. Nối BD, DC ta có tứ giác BDCH là hình bình hành (vì có  $DC \parallel BB'$ ,  $BD \parallel HC$ ) và K là trung điểm của BC  $\Rightarrow K$  là trung điểm của HD (theo tính chất của hình bình hành) nên OK là đường trung bình của  $\Delta AHD \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AH$  hay  $AH = 2OK$ .

Trên đây là một số BT minh họa cho biện pháp rèn luyện năng lực PTVTH cho HS thông qua các BT giải bằng PP vẽ thêm hình phụ; làm sáng tỏ sự vận dụng các biện pháp vẽ hình phụ thích hợp cho mỗi BT. Đồng thời, nó cũng chứng tỏ vai trò quan trọng của các thao tác tư duy PTVTH trong hoạt động giải toán của HS. Có PT BT mới xác định được các yếu tố đã cho, yếu tố phải tìm, mối quan hệ giữa

chúng... và thứ tự của các bước giải quyết vấn đề. TH các kết quả của PT để hoàn thiện lời giải và phát triển BT ban đầu.

\*\*\*

Trong quá trình giải các BT hình học, việc vẽ thêm hình phụ không những giúp HS tìm được lời giải một cách dễ dàng mà còn đưa ra những lời giải hay, ngắn gọn, độc đáo mang tính sáng tạo cao. Các BT giải bằng PP vẽ thêm hình phụ đòi hỏi HS phải nắm vững kiến thức và có kĩ năng giải toán nhất định. Để tạo ra được một hình phụ liên kết tương minh mối quan hệ toán học giữa các điều kiện đã cho với điều kiện cần tìm, HS phải thực hiện các thao tác tư duy PTVTH; qua đó, phát triển năng lực trí tuệ và tư duy khoa học cho HS. □

- (1) Hoàng Chúng. **Phương pháp dạy học toán học ở trường trung học cơ sở**. NXB Giáo dục, H. 1997.  
(2) Hoàng Phê (chủ biên). **Từ điển tiếng Việt**. NXB Đà Nẵng và Trung tâm từ điển học, Hà Nội - Đà Nẵng 2000.

## Dạy chiến thuật đọc hiểu...

(Tiếp theo trang 39)

đọc hiểu ấy là gì: một văn bản bị "phân tích", bị chia nát, rõ là viết về con người và cuộc sống mà đôi khi chẳng có một chút sinh khí nào - như vậy, làm sao giờ vẫn còn có "chất văn"? GV muốn thi phạm một CT nào đó để hình thành kĩ năng "dự đoán" trong khi đọc, làm phong phú thêm sự cảm nhận, coi là cơ sở để đánh giá cách lí giải về đời sống của nhà văn,... nhưng lại chưa bao giờ từng tích cực "đón đầu" như vậy trong quá trình đọc lập đọc hiểu văn bản của mình. Nếu vậy, họ làm sao có thể dự đoán được, lại càng không thể tiên liệu những dự đoán phong phú của HS trong tình huống cụ thể để dự định phương án điều khiển, điều chỉnh cho phù hợp, để luôn luôn chủ động trong mọi tình huống dạy học. GV chỉ có thể dạy đọc hiểu văn bản cho HS khi bản thân cũng là một "độc giả" đúng nghĩa; biết "phân thân" để quan sát xem mình đang đọc hiểu văn bản như thế nào, gặp khó khăn gì; biết đặt mình vào vị trí HS - những độc giả phát triển - để tiên liệu các tình huống cần tháo gỡ. Có lẽ ít nhất đó cũng là

(3) Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB Đại học sư phạm, H. 2011.

### Tài liệu tham khảo

1. Phan Đức Chính (tổng chủ biên) - Tôn Thân (chủ biên). **Toán 9**. NXB Giáo dục, H. 2005.
2. Nguyễn Bá Kim - Vương Dương Minh - Tôn Thân. **Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn Toán ở trường trung học cơ sở**. NXB Giáo dục, H. 1999.
3. Bùi Văn Nghị. **Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán**. NXB Đại học sư phạm, H. 2008.
4. Nguyễn Đức Tấn. **Vẽ thêm yếu tố phụ để giải một số bài toán hình học 9**. NXB Giáo dục, H. 2005.
5. Bạch Phương Vinh. "Khai thác các bài toán trong dạy học phân hình học lớp 9 nhằm rèn luyện thao tác tư duy phân tích và tổng hợp cho học sinh". *Tạp chí Giáo dục*, tháng 9/2011.

### SUMMARY

*In this paper, the author presents several analysis measures to find out how to draw more shapes appropriate in order to solved geometry and some geometric problems class 9, solved by method draw more shapes, to train students to manipulate analytical thinking and synthesis.*

một vài định hướng trước khi người dạy thực sự bắt tay vào thiết kế và sử dụng các CT dạy học đọc hiểu văn bản. □

- (1) Harris, T. - Hodges, R. **The literacy dictionary: The vocabulary of reading and writing**. DE: International Reading Association, 1995.  
(2) National Council of Teachers of English, International Reading Association. **Standards for English Language Arts**. Urbana, IL: NCTE, 1996.

### SUMMARY

*Reading comprehension strategy is a cognitive process carefully led by specific purposes or a processing way to control the reader's effort to decoding and making meaning from text. The relationship between strategy and skill is causal and additional. As a model of information theory, there are 3 kinds of strategy: cognition, metacognition and interaction. From the study of reader's portrait, strategies are divided into some kinds as follows acting prior knowledge and experiences, predicting, making questions... There are two approaches in strategy training, which are to provide directly students with basic strategies, and teach students indirectly through problem solving. To do that, teachers should divide skills into elements which help students observe, identify and practise those skills.*