THIẾT LẬP BÀI TOÁN MỚI TRÊN CƠ SỞ KHAI THÁC BÀI TOÁN ĐÃ CHO BẰNG PHÉP TƯƠNG TỰ HÓA

ThS. NGUYỄN THỊ MỸ HẰNG*

1. Tương tự hóa

G. Polya cho rằng, *tương tự là một kiểu giống nhau nào đó, là giống nhau nhưng ở mức độ xác định hơn và mức độ đó được phản ánh bằng khái niệm. Sự khác nhau căn bản giữa tương tự và những loại giống nhau khác là ở ý định của người đang suy nghĩ. Những đối tượng giống nhau phù hợp với nhau trong một quan hệ nào đó. Nếu bạn có ý định quy mối quan hệ, trong đó các đối tượng phù hợp với nhau về những khái niệm đã định thì bạn sẽ xem những đối tượng giống nhau ấy như là những đối tượng tương tự. Và nếu bạn đạt tới những khái niệm rõ ràng, tức là bạn làm sáng tỏ sự tương tự* (dẫn theo (1)). Trong "Logic học", Đ. P. Goocki cho rằng: *Tương tự là phép suy luận trong đó từ chỗ hai đối tượng giống nhau ở một số dấu hiệu, ta rút ra kết luận rằng các đối tượng này giống nhau ở các dấu hiệu khác* (dẫn theo (2)). Trong (3), tác giả cho rằng *tương tự là chuyển từ một trường hợp riêng này sang một trường hợp riêng khác của cùng một cái tổng quát.*

Có thể hiểu, phép tương tự là phép suy luận có lí đi từ một số thuộc tính giống nhau của hai đối tượng để rút ra kết luận về những thuộc tính giống nhau, khác nhau của hai đối tượng đó. Kết luận của phép tương tự có thể đúng có thể sai, nó có tính chất dự đoán. Nói về vai trò của tương tự, G. Polya có nhận xét: *Phép tương tự có lẽ có mặt trong mọi phát minh, và trong một số phát minh nó chiếm vai trò quan trọng hơn cả. Có thể là sẽ không có một phát minh nào trong toán học sơ cấp cũng như cao cấp, thậm chí trong bất cứ lĩnh vực nào, nếu ta không dùng đến thao tác tư duy như khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa, đặc biệt là tương tự hóa* (dẫn theo (1)). Theo nhà thiên văn học Kepler (người Đức), người đã phát minh ra ba định luật nổi tiếng trong thiên văn học thì: *Tôi vô cùng biết ơn các phép tương tự, những người thầy đáng tin cậy nhất của tôi, các phép tương tự đã giúp tôi khám phá ra các bí mật của tự nhiên, đã giúp tôi vượt qua mọi trở ngại* (dẫn theo (1)).

Từ các quan điểm khác nhau về tương tự và các luận điểm đã nêu ở trên, chúng tôi cho rằng: *Tương tự hóa là quá trình dùng trí óc để kết luận về sự giống nhau của các đối tượng ở một số dấu hiệu, thuộc tính khác, từ sự giống nhau của các đối tượng ở một số dấu hiệu, thuộc tính nào đó nhằm mục đích tạo ra một kết quả mới, vượt qua một trở ngại.*

2. Tạo bài toán (BT) mới bằng tương tự hóa

Sau đây, ta xét đến khía cạnh "*tạo ra một kết quả mới*" của phép tương tự hóa, cụ thể là tập luyện cho học sinh (HS) lập BT mới tương tự với BT ban đầu bằng cách phân tích cách giải và nội dung của BT ban đầu. Vấn đề tương tự của hai BT có thể được xem xét dưới các khía cạnh sau: - Chúng có đường lối, phương pháp giải giống nhau; - Nội dung của các BT có những nét giống nhau; - Cùng đề cập đến những vấn đề, đối tượng có tính chất giống nhau.

Từ một số tính chất giống nhau của hai đối tượng, ta có thể dự đoán các tính chất giống nhau khác của chúng: nếu đối tượng A có các tính chất a, b, c, d, còn đối tượng B có các tính chất a, b, c thì B cũng có thể có tính chất d. Đây chính là tác dụng của phương pháp tương tự trong việc tạo ra BT mới: sau khi so sánh, đối chiếu các thuộc tính giống nhau của các đối tượng, ta có thể đề ra giả thuyết tương tự rồi dùng chứng minh để khẳng định hay bác bỏ giả thuyết ấy. Chẳng hạn, từ phép biến đổi tương đương của phương trình (PT): $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$, ta có giả thuyết về phép biến đổi tương đương của bất PT $\sqrt{f(x)}\geq g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)\geq g^2(x)\end{cases}$ (giả thuyết sai). Từ các phép biến đổi PT, bất PT mũ cơ bản $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)>g(x) & (a>1)\\ f(x)<g(x) & (0<a<1)\end{array}\right.$, ta có giả thuyết về các phép biến đổi PT, bất PT logarit cơ bản: $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)$, $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)>g(x) & (a>1)\\ f(x)<g(x) & (0<a<1)\end{array}\right.$ (giả thuyết

* Khoa Toán, Trường Đại học Vinh

sai); từ tính biến thiên của hàm số mũ: hàm số $y = a^x$ đồng biến trên tập xác định khi a > 1, nghịch biến trên tập xác định khi 0 < a < 1, ta có giả thuyết về tính biến thiên của hàm số logarit: hàm số $y = log_a x$ đồng biến trên tập xác định khi a > 1, nghịch biến trên tập xác định khi 0 < a < 1 (giả thuyết đúng),...

Khi giải một BT nào đó, chúng ta nên đặt câu hỏi: BT được giải như thế nào để tạo được BT tương tự (về đường lối giải hoặc về cấu trúc nội dung). Đôi khi, phân tích cách giải của BT đã cho có thể tạo được các BT khác. *Ví dụ:* xét PT $3\sqrt{(2x+1)(x^2-x+2)} = 2x^2+5$ (1) là PT vô tỉ chứa căn thức bậc hai ở dạng cơ bản. Để giải PT này, cách thứ nhất là khái quát hóa nhằm liên tưởng tới dạng cơ bản $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$. Tuy nhiên, đối với trường hợp này, PT có được sau khi bình phương hai vế là PT bậc bốn không có nghiệm hữu tỉ nên khi giải HS sẽ gặp khó khăn. Nếu xét vế phải của PT dưới dạng (2x+1) + 2(x² - x + 2) thì PT (1) sẽ là PT đẳng cấp bậc hai đối với $\sqrt{2x+1}$ và $\sqrt{x^2-x+1}$. Mà PT đẳng cấp bậc hai đã có thuật giải cụ thể như sau: $(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{(2x+1)(x^2-x+2)} = (2x+1) + 2(x^2-x+2)$.

Đặt $u = \sqrt{2x+1}, v = \sqrt{x^2-x+2}$, PT (1) trở thành $3uv = u^2 + 2v^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u = 2v \end{array}\right.$.

Nếu $u = v$ thì:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2-x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x^2-3x+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Nếu u = 2v thì:

$$\sqrt{2x+1} = 2\sqrt{x^2-x+2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2x+1 = 4(x^2-x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 4x^2-6x+7 = 0 \end{cases}$$

(vô nghiệm).

Vậy, PT đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. HS cần tìm câu trả lời tại sao lại có thể tạo được PT như thế? Có phải mọi PT có cấu trúc tương tự đều giải được và cách giải tương tự như trên hay không? Thử xét một PT có cấu trúc nội dung gần giống PT (1) (vế phải là căn bậc hai của tích một nhị thức bậc nhất và một tam thức bậc hai, vế trái là một tam thức bậc hai):

$$4\sqrt{(x+3)(x^2+2x+3)} = x^2+5x+8 \quad (2).$$

Thực hiện thao tác giống như với PT (1), ta tìm cách biểu diễn vế phải của PT tuyến tính theo (x + 3) và (x² + 2x + 3), tuy nhiên, điều này không làm được. Thật vậy, giả sử $x^2+5x+8 = a(x+3) + b(x^2+2x+8)$, sử dụng đồng nhất thức hai vế, ta có: $\begin{cases} 1 = b \\ 5 = a+2b \\ 8 = 3a+8b \end{cases}$, hệ PT này vô nghiệm. Do đó, PT (2) không giải được theo cách của PT (1).

Mấu chốt của sự không giải được theo cách trên là do không phân tích được vế phải theo (x + 3) và (x² + 2x + 3), hay cụ thể hơn là do hệ PT bậc nhất hai ẩn nhưng lại ba PT nên có thể vô nghiệm. Vậy, để tạo được PT tương tự, cần biểu diễn vế phải của (2) theo (x + 3) và (x² + 2x + 3). Vế phải là biểu thức như thế nào để có thể biểu diễn được như vậy? Chúng ta đi theo chiều ngược lại, giả sử vế phải đã biểu thị tuyến tính theo (x + 3) và (x² + 2x + 3), chẳng hạn vế phải là $3(x+3) + 1(x^2+2x+3) = x^2+5x+12$, ta có PT: $4\sqrt{(x+3)(x^2+2x+3)} = x^2+5x+12$.

Việc chọn hệ số 3 đứng trước (x + 3) và hệ số 1 đứng trước (x² + 2x + 3) cũng có dụng ý là làm cho PT đẳng cấp bậc hai đối với $\sqrt{x+3}$ và $\sqrt{x^2+2x+3}$ có nghiệm hữu tỉ. Như vậy, bằng cách thay a và b bởi các cặp số cụ thể ta được một loạt các bài tập tương tự. Cũng bằng cách như trên, giáo viên (GV) có thể yêu cầu HS đề xuất một số PT tương tự như PT (1) để có được một hệ thống bài tập phong phú, chẳng hạn: Giải các PT sau: a) $2\sqrt{(x+3)(x^2+2x+3)} = 3x^2+5x+6$;

b) $10\sqrt{x^3+1} = 7x^2-4x+10$;

c) $\sqrt{(x^2+2)(3x^2-4x+1)} = -17x^2-4x-39$;

d) $10x^2-9x-8x\sqrt{2x^2-3x+1}+3 = 0$;

e) $6x^2-36x-x\sqrt{3x+2} = 24$;

f) $6(2x+1)\sqrt{x^2+x+2}+14 = 9x^2+9x+11$;...

Chúng ta xét tiếp PT: $2\sqrt{x(x^2-1)} = x^2-4x-3$ (3). Về cấu trúc nội dung thì PT (3) giống PT (1). Do đó, thoạt đầu, HS có thể giải PT (3) tương tự như PT (1) bằng cách phân tích vế phải của (3) theo x và (x^2 + 1). Tuy nhiên, việc phân tích này không thực hiện được. Nếu ta nhìn vế trái $2\sqrt{x(x^2-1)}$ dưới dạng

$2\sqrt{x(x-1)(x+1)}=2\sqrt{(x^2-x)(x+1)}$ thì vế phải sẽ được biểu diễn là (x^2-x) - 3(x+1). Mặc dù đã đưa về được dạng tương tự PT (1) nhưng HS dễ mắc phải sai lầm khi xem rằng (3) là PT đẳng cấp đối với $\sqrt{x^2-x}$ và $\sqrt{x+1}$. Nguyên nhân sai lầm là do HS ngộ nhận $\sqrt{(x^2-x)(x+1)}=\sqrt{x^2-x}\sqrt{x+1}$ mà không biết rằng trên tập xác định thì (x^2 - x) và (x + 1) có thể âm (nếu trên tập xác định mà (x^2 - x) và (x+ 1) đều không âm thì sự phân tích trên là đúng). Sau khi hướng dẫn HS tìm tập xác định của PT, biến đổi PT (3) về dạng $2\sqrt{(x^2-x)(x+1)}=(x^2-x)-3(x+1)$, GV cần đặt câu hỏi nhằm gợi động cơ để HS thấy sự cần thiết phải phân chia tập xác định và giải PT trên mỗi bộ phận vừa được phân chia.

Bằng phép tương tự hóa, có thể thay vế phải là $3(2x+1)+4(x^2-3x+2)=4x^2-6x+11$, vế trái là $7\sqrt{(2x+1)(x^2-3x+2)}=7\sqrt{(2x+1)(x-1)(x-2)}=7\sqrt{(2x^2-x-1)(x-2)}$

Khi đó, ta có PT: $7\sqrt{(2x^2-x-1)(x-2)}=4x^2-6x+11$. Với cách làm như vậy, HS có thể tự tạo được các PT sau:

a) $3\sqrt{(x+3)(x^2-4)}-10=2x^2+11x$;

b) $\sqrt{(x^2-9)(x+1)}=3x^2-8x-15$;

c) $\sqrt{(x^2-9)(x^2-3x+2)}=x^2-14x+21$;

d) $5\sqrt{(2x-1)(x^2-16)}=6x^2+23x-20$;

e) $5\sqrt{(2x-1)(x^2-16)}=6x^2-25x+20$;

f) $\sqrt{(x^2-9)(x+1)}=3x^2+10x+15$;...

GV tiếp tục yêu cầu HS giải PT: $\sqrt{x}+\sqrt{x^2-1}=\sqrt{2x^2-3x-4}$ (4) và đề xuất hệ thống PT tương tự. GV có thể hướng dẫn HS giải PT (4) như sau: - Bước đầu tiên khi giải PT vô tỉ chứa nhiều căn bậc hai là gì? (tìm tập xác định của PT); - Hãy tìm tập xác định của PT; - Những phương pháp chung nào để giải PT vô tỉ chứa căn bậc hai? (bình phương hai vế thích hợp để làm mất dấu căn thức, đặt ẩn phụ, nhẩm nghiệm đưa về PT tích,...); - Hai vế của PT (4) gợi cho chúng ta điều gì? (hai vế không âm nên có thể bình phương); - Hãy bình phương hai vế của PT; - Khi còn một căn thức thì ta thường biến đổi PT như thế nào? (biến đổi về dạng cơ bản $\sqrt{f(x)}=g(x)$ bằng cách cô lập căn thức); - Các em đã giải PT nào có cấu trúc giống với PT vừa biến đổi hay chưa? (chính là PT (3)); - Hãy trình bày lời giải?; - Làm thế nào để có thể tạo được một PT tương tự như PT (4) cả về cách giải và cấu trúc? Các em hãy dựa vào lời giải của PT (4) để có thể tạo được một PT mới?

Có thể xét (x^2 - x) dưới dạng là một tam thức bậc hai có hai nghiệm phân biệt, (x + 1) là nhị thức bậc nhất. Như vậy, ta có thể chọn tam thức khác là (x^2 - 3x + 2) và nhị thức (x + 3). Bắt đầu từ PT giải được $2\sqrt{(x^2-3x+2)(x+3)}=3(x^2-3x+2)-(x+3)$, hay $2\sqrt{(x^2-3x+2)(x+3)}=3x^2-10x+3$, ta biến đổi lại vế trái của PT: $2\sqrt{(x^2-3x+2)(x+3)}=2\sqrt{(x-1)(x-2)(x+3)}=2\sqrt{(x-1)(x^2+x-6)}$, xem vế trái là "hai lần tích biểu thức thứ nhất và biểu thức thứ hai", khi đó, còn thiếu "bình phương biểu thức thứ nhất cộng với bình phương biểu thức thứ hai" là (x - 1) + (x^2 + x - 6). Nếu thêm vào hai vế của PT biểu thức , vế phải sẽ là $4x^2$ - 8x - 4. Khi đó, ta có: $(x-1)+2\sqrt{(x-1)(x^2+x-6)}+(x^2+x-6)=4x^2-8x-4$.

Từ đó, ta có thể đề xuất PT: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+x-6}=\sqrt{4x^2-8x-4}$.

Bằng cách làm tương tự như trên, ta có được các PT: a) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{x^2-3x-1}$;

b) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+x}$;

c) $\sqrt{3x^2-4x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{-3x^2+9x-11}$;

d) $\sqrt{x^2-x-6}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x^2-4x+2}$;

e) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2+4x+3}=\sqrt{6x+8}$;

f) $\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$;...

***

Trong dạy học nói chung, nếu GV phân tích kĩ lời giải, HS có thể tự giải được những PT tương tự. GV cần hướng dẫn HS tạo ra các BT mới tương tự với BT ban đầu để có một hệ thống bài tập đa dạng, phong phú, đồng thời phát triển khả năng sáng tạo của các em. Phát hiện vấn đề, đề xuất BT mới từ những BT đã cho sẽ giúp HS tự tin hơn, học tập thoải mái hơn; các em sẽ tránh được tình trạng bị động, thiếu tự tin, luôn thấy các BT là bí ẩn, bản thân không đủ khả năng giải các BT đã cho,... ❑

(1) G. Polya. **Toán học và những suy luận có lí**. NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2010.
(2) Vương Tất Đạt. **Logic học**. NXB *Giáo dục*, H. 1998.
(3) Nguyễn Bá Kim - Vương Dương Minh - Tôn Thân. **Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn Toán**. NXB *Giáo dục*, H. 1999.

(Xem tiếp trang 37)

thừa cổ truyền của dân tộc. Nếu không là người có tài, có tâm và có tình, chắc hẳn Nguyễn Khuyến không viết lên được những vần thơ như thế. Ánh mắt, đôi tai, và cả tấm lòng của nhà thơ như cởi mở, chan hoà vào với đất trời và với những người dân quê đất Việt.

***

Với việc đưa vào thơ những nét văn hoá truyền thống của dân tộc, Nguyễn Khuyến đã vô hình lột bỏ lớp vỏ cứng nhắc của thơ ca cổ để làm mới thơ mình. Đôi chỗ thơ vẫn còn mang tính ước lệ, nhưng người đọc thấy vẫn rất tự nhiên, thoải mái. Bởi vậy, trên thực tế, nói đến Nguyễn Khuyến là nói đến nhà thơ dân dã, nhà thơ của làng quê Việt Nam, của người dân lao động. Trong dòng chảy phát triển của lịch sử thơ ca, từ nguyên tắc phản ánh thực tại nông thôn Việt Nam của nhà Nho đến chủ nghĩa hiện thực thoát khỏi những khuôn sáo trong thơ thì mảng thơ Nôm lưu giữ những giá trị văn hóa truyền thống dân tộc của Nguyễn Khuyến trở thành một dấu mốc quan trọng. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Hội văn học nghệ thuật Hà Nam Ninh. **Nguyễn Khuyến tác phẩm**. NXB *Khoa học xã hội*, H. 1984.
2. Nhiều tác giả. **Nguyễn Khuyến về tác gia và tác phẩm**. NXB *Giáo dục*, TP. Hồ Chí Minh, 2003.

SUMMARY

In the contemporary integration, some traditional cultural values are fading. Therefore, literary works, especially classic ones, become the authentic cultural artifacts which can help current and future generations understand our national cultural beauty. In Nôm poetry of Nguyễn Khuyến, the beauty of cultural activities of people who live in the North Delta in general and Yên Đổ village (the poet's motherland) in particular is demonstrated lively and interestingly.

So sánh yêu cầu đọc hiểu của...

(Tiếp theo trang 34)

thức VB (nhận ra được những đặc điểm về sự liên quan giữa phong cách trình bày và mục đích của VB đó), sau đó nêu cách cho điểm tối đa và không cho điểm kèm đáp án. Đáp án của PISA rất đa dạng và phong phú, ngay cả đối với các câu hỏi trắc nghiệm, có đáp án khá đơn giản, có những đáp án rất phức tạp theo hướng mở. Vì vậy, nếu trong đáp án đề thi của chương trình *Ngữ văn* Việt Nam, một câu hỏi sẽ tương ứng với một câu trả lời đúng, thì đáp án của PISA, một câu hỏi có thể có từ 3-5 câu trả lời được chấp nhận là đúng. Vì vậy, đòi hỏi giáo viên phải không ngừng suy nghĩ, nâng cao trình độ, phải hình dung và bao quát hết được các khả năng HS có thể trả lời để đánh giá *chính xác trình độ* của HS. ❑

(1) Đỗ Ngọc Thống. **Chương trình Ngữ văn trong nhà trường phổ thông Việt Nam**. NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2011.

(2) Nhóm tác giả. **Sổ tay Pisa dành cho cán bộ quản lí giáo dục và giáo viên trung học**. H. 2011.

(3) Đỗ Ngọc Thống. *"Chương trình Ngữ văn trong nhà trường phổ thông Việt Nam và hướng phát triển sau năm 2015"*. htpp://www.nico-pari.com. 1/12/2012.

(4) www.oecd.org/pisal

Tài liệu tham khảo

1. Bộ GD-ĐT. **Chương trình giáo dục phổ thông môn Ngữ văn**. NXB *Giáo dục*, H. 2006.

SUMMARY

Reading comprehension requestments of PISA and those of Literature program at secondary schools in Vietnam had some similarities and differences in terms of objectives, requestments, learners and assessment methods. Apart from some similarities to reading comprehension requestments of PISA, those of Literature program at secondary schools in Vietnam have some limitations which should be overcomed by reforming thoroughly reading comprehension in Literature program.

Thiết lập bài toán mới...

(Tiếp theo trang 45)

SUMMARY

In teaching in general, in teaching mathematics in particular, it is necessary and possible for teachers along with students to create new problems which are similar to the initial one in order to have a system of various problems, not too dependent on references, simultaneously develop the ability of creation for students. Detecting problems and proposing new problems from the given problems also help students be more confident and learn more comfortably, because they will get out of the passive status, whenever find themselves inability of solving problems given in books, find creating mathematics problems mysterious and sublime... In this paper, we instruct students to create new equations from the initial ones through analysing the solutions and structure of content of the initial equations in detail.