# DẠY HỌC BẤT ĐẲNG THỨC THEO HƯỚNG RÈN LUYỆN MỘT SỐ YẾU TỐ CỦA TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH

TRẦN THỊ HUẾ*

Thực tiễn dạy học toán cho thấy, có nhiều học sinh (HS) khá thành thạo trong chứng minh một số dạng bất đẳng thức (BĐT) nào đó nhưng khi gặp BĐT có dạng tương tự, các em lại gặp khó khăn. Trước tình hình đó, HS cần có cách tư duy linh hoạt, mềm dẻo. Bài viết khai thác một cách dạy học BĐT theo hướng rèn luyện một số yếu tố của tư duy sáng tạo (TDST) cho HS ở trung học phổ thông (THPT).

**1. Phát triển TDST cho HS phổ thông trong dạy học về BĐT**

Theo (1, tr. 72): *"TDST là một dạng tư duy độc lập, tạo ra ý tưởng mới độc đáo và có hiệu quả giải quyết vấn đề cao. Ý tưởng mới thể hiện ở chỗ phát hiện vấn đề mới, tìm hướng đi mới, tạo ra kết quả mới. Tính độc đáo của ý tưởng mới thể hiện ở giải pháp lạ, hiếm, không quen thuộc hoặc duy nhất".* Theo (2), có 5 thành phần cơ bản của TDST là: *tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo, tính hoàn thiện, tính nhạy cảm vấn đề.* Trong đó: tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo là ba yếu tố cơ bản.

Để HS THPT phát triển TDST trong dạy học các bài toán (BT) về BĐT, theo chúng tôi, cần sắp xếp các BT về BĐT thành từng dạng, ở mỗi dạng lại đề xuất phương pháp chứng minh chủ yếu. Trong từng dạng đó, cần có các BT rèn luyện tính nhuần nhuyễn, tính mềm dẻo và tính độc đáo. Một BT có thể có nhiều lời giải khác nhau, HS cần có sự linh hoạt, sự uyển chuyển trong tư duy khi giải toán để vượt qua các chướng ngại. Ở trường phổ thông, lời giải một BT được coi là độc đáo nếu lời giải đó khác với những lời giải thường gặp, không quá phức tạp nhưng có một cách nhìn khác về BT.

2. Dưới đây, chúng tôi đưa ra một số dạng toán BĐT điển hình:

***Dạng 1: BĐT đối xứng của hai biến số bị chặn trên một đoạn.***

*BT 1:* Cho $x, y \in [-1;2]$ và thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 5$.

*BT 2:* Cho $x, y \in [-2;2]$ và thỏa mãn $x + y = 0$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 8$.

*BT 3:* Cho $x, y \in [2;4]$ và thỏa mãn $x + y = 6$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 20$.

*BT 4:* Cho $x, y \ge 0$ thỏa mãn: $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng: $x + y \le \sqrt{2}$.

*BT 5:* Cho $x, y \in [2;4]$, $x + y = 5$. Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 \le 13$.

*Phân tích:* Trong hệ thống các BT ở trên, BT 1, BT 2, BT 3 có thể sử dụng các BĐT quen thuộc như: BĐT Cô-si, BĐT Bunhiacopxki. Đây là dạng toán nhằm rèn luyện sự nhuần nhuyễn trong cách chứng minh BĐT liên quan đến các số thực bị chặn trên một đoạn. Ở BT 4, BT 5, nếu dựa vào sự nhuần nhuyễn đã có khi giải BT 1, BT 2, BT 3 thì HS có thể gặp trở ngại, không giải được; vì vậy, đòi hỏi các em phải có sự linh hoạt, uyển chuyển trong cách nghĩ, cách áp dụng.

Hướng dẫn:

*BT 1:* Nếu HS sử dụng các BĐT cơ bản, các em có thể nghĩ đến BĐT Bunhiacopxki quen thuộc: $(x+y)^2 \le (1^2+1^2)(x^2+y^2)$ (dấu của BĐT ngược chiều với BĐT cần chứng minh), hoặc biến đổi $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=1-2xy \ge 1-\frac{(x+y)^2}{2}=\frac{1}{2}$ (sử dụng cách này sẽ ngược chiều với BĐT cần chứng minh). Như vậy, HS vẫn chưa giải được BT. Với những HS đã nhuần nhuyễn với dạng toán này, các em có thể áp dụng điều kiện tương đương và điều kiện bị chặn, đánh giá vế trái của BĐT theo tổng $(x+y)$ để đạt được điều phải chứng minh.

*Cách 1:* Ta có: $x \in [-1;2] \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \le 0.$ $\Leftrightarrow x^2 \le x+2$ Tương tự: $y^2 \le y+2$, suy ra: $x^2+y^2 \le x+y+4=5$. Đẳng thức xảy ra khi: $\left[\begin{array}{l} x=-1, y=2 \\ x=2, y=-1 \end{array}\right.$

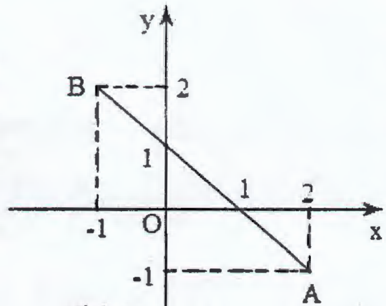
Do BĐT đã cho là BĐT hai biến, từ giả thiết có thể rút

* Cao học K 21, Trường Đại học sư phạm Hà Nội

biến này theo biến kia. Như vậy, nếu HS đã nhuần nhuyễn với phương pháp thế thì có thể nghĩ đến việc đưa BĐT cần chứng minh từ hai biến trở thành một biến.

*Cách 2:* Từ giả thiết, suy ra y = 1-*x*. Do $-1 \le y \le 2 \Rightarrow -1 \le 1-x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$. Khi đó: $x^2+y^2 = x^2+(1-x)^2 = 2x^2-2x+1$. Đến đây, nếu HS nhuần nhuyễn phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một hàm số trên một đoạn, các em sẽ dễ dàng xử lí BT. Ngoài ra, HS cũng có thể nghĩ đến phương pháp hình học sau:

*Cách 3:* Trong mặt phẳng (Ox*y*) (*hình 1*), xét các điểm *M(x,y)* (với *x,y* thỏa mãn: *x + y* = 1 ) tạo thành đoạn *AB* của đường thẳng *y*= 1-*x*. Từ đó: $T = x^2+y^2 = OM^2$ lớn nhất khi *M* trùng với *A* hoặc *M* trùng với *B*.



*Hình 1*

BT 2 và BT 3 tương tự BT 1.

*BT 4:* HS có thể đưa ra cách giải dựa vào độ nhuần nhuyễn về các BĐT thông thường dạng $a^2+b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$ hoặc BĐT Bunhiacopxki.

*Cách 1:* Áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta được:

$$(x+y)^2 \le (1^2+1^2)(x^2+y^2) = 2 \Rightarrow x+y \le 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Ngoài ra, HS có thể linh hoạt trong tư duy khi đặt *S = x+y*, sau đó sử dụng phương pháp thế, rút *y* theo *x*, thay vào giả thiết tìm miền giá trị của *S*. Cụ thể:

*Cách 2:* Đặt thay vào $x^2+y^2 = 1$ ta được:

$$x^2+(S-x)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2-2Sx+S^2-1 = 0 \quad (1)$$

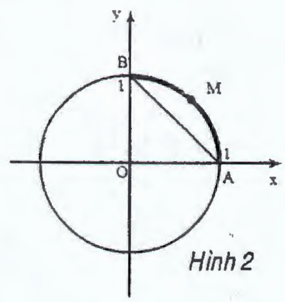
Đến đây, HS cần linh hoạt chuyển BT sang một cách nhìn khác: coi (1) là phương trình bậc 2, ẩn x; khi đó, điều kiện để phương trình (1) có nghiệm là: $\Delta' \ge 0$ $\Leftrightarrow \Delta' = S^2-2(S^2-1) \ge 0 \Leftrightarrow S^2 \le 2 \Rightarrow 0 \le S \le \sqrt{2} \Rightarrow S \le \sqrt{2}$

*Cách 3:* Trong mặt phẳng tọa độ (Ox*y*), điểm *M(x,y)* thỏa mãn: $x, y \ge 0, x^2+y^2 = 1$ thuộc cung nhỏ *AB* của đường tròn đơn vị với *A*(1;0), *B*(0,1) (*hình 2*). Lúc này, HS cần biến đổi để đưa về các yếu tố hình học:

$$0 \le x+y \le \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{\sqrt{2}} \le 1 \Leftrightarrow \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} \le 1.$$

Có: $\frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = d(M;d)$ với d : *x + y* = 0, *x,y*≥0.

Do vậy, $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ là khoảng cách từ điểm *M* thuộc cung đậm AB tới đường thẳng *AB*. BT trở thành tìm điểm *M* thuộc cung đậm AB (*hình 2*) sao cho khoảng cách *d (M;d)* là lớn nhất. Khi đó, HS dễ dàng thấy ngay, khoảng cách *d (M;d)* là lớn nhất khi *MO*⊥*AB*. Ngoài ra, HS cũng có thể xét BT dưới góc độ lượng giác như sau:



*Hình 2*

*Cách 4:* Do $x, y \ge 0; x^2+y^2 = 1$, đặt $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Ta có:

$$x+y = \cos t + \sin t = \sqrt{2}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}.$$

*BT 5:* BT này đòi hỏi HS cần vận dụng linh hoạt các cách giải đã biết ở BT 1.

- Nếu theo *cách 1:*

$$x \in [2;4] \Leftrightarrow (x-2)(x-4) \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 6x-8$$

Tương tự: $y^2 \le 6y-8$, suy ra: $T = x^2+y^2 \le 6(x+y)-16 \le 14$ (do *x+y* = 5). BT chưa được chứng minh.

- Nếu theo *cách 2:* từ $x+y = 5 \Rightarrow y = 5-x$, mà $y \in [2;4] \Rightarrow 2 \le 5-x \le 4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$. Theo đề bài: $x \in [2;4] \Rightarrow x \in [2;3]$. Đặt $T = x^2+y^2 = x^2+(5-x)^2$ $= 2x^2-10x+25$. Khi đó, xét hàm số $f(x) = 2x^2-10x+25$ trên đoạn [2;3]. BT chuyển về tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên một đoạn.

- Nếu theo *cách 3*, HS đánh giá như ở cách 2 và rút ra được: $x, y \in [2;3]$, suy ra $(x-2)(x-3) \le 0$ $\Leftrightarrow x^2 \le 5x-6$; tương tự: $y^2 \le 5y-6$. Vậy, $x^2+y^2 \le 5(x+y)-12 = 13$.

Dấu của đẳng thức xảy ra khi: (*x;y*) = (2;3) hoặc (*x;y*) = (3;2).

Từ cách xử lí linh hoạt ở *cách 2* và *cách 3*, HS hoàn toàn có thể giải BT theo cách 1 như sau: Theo đánh giá ở cách 2, ta có $x, y \in [2;3]$, suy ra: $(x-2)(x-3) \le 0 \Leftrightarrow x^2 \le 5x-6$; tương tự: $y^2 \le 5y-6$.

Vậy, $x^2+y^2 \le 5(x+y)-12=13$. Dấu của đẳng thức xảy ra khi: $(x;y) = (2;3)$ hoặc $(x;y) = (3;2)$. *Nhận xét: Nhóm bài tập toán trên* vừa có thể rèn luyện tính nhuần nhuyễn, tính mềm dẻo, lại vừa rèn luyện được tính độc đáo của tư duy cho HS.

***Dạng 2: BĐT đối xứng ba biến số bị chặn trên một đoạn.***

*BT 6:* Cho $x, y, z \in [0;2]$ và $x+y+z=4$. Chứng minh rằng: $P=x^2+y^2+z^2 \le 8$.

*BT 7:* Cho $x, y, z \in [-1;1]$ và $x+y+z=0$. Chứng minh rằng: $P=x^2+y^2+z^2 \le 2$.

*BT 8:* Cho $x, y, z \in [0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng: $P=x^2+y^2+z^2 \le 5$.

*BT 9:* Cho $x, y, z \in [0;2]$ và $x+y+z=5$. Chứng minh rằng: $P=x^2+y^2+z^2 \le 9$.

*BT 10:* Cho $x, y, z \in [0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng: $P=x^2+y^2+z^2 \ge 3$.

*Phân tích:* BT 6, BT 7, BT 8 nhằm rèn luyện sự nhuần nhuyễn trong cách chứng minh các BĐT dạng đối xứng ba biến số bị chặn trên một đoạn. Các BT 9, BT 10 rèn luyện tính linh hoạt, sáng tạo cho HS.

Phương pháp chứng minh các BĐT dạng này được kế thừa từ phương pháp chứng minh dạng toán đối xứng hai biến số bị chặn trên một đoạn đã trình bày ở trên. Tuy nhiên, vì số biến tăng lên nên có những cách chứng minh không kế thừa được; chẳng hạn: phương pháp rút ẩn quy về một biến không sử dụng được mà chỉ có thể kế thừa ý tưởng "giảm biến" trong phương pháp đó. Ngoài ra, HS cũng có nhiều cách chứng minh khác.

***Dạng 3. BĐT không đối xứng giữa ba biến số bị chặn trên một đoạn***

*BT 11:* Cho $x,y,z \in [0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng: $P=(x-4)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \ge \frac{9}{2}$.

*BT 12:* Cho $x,y,z \in [0;2]$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng: $P=(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-4)^2 \ge \frac{33}{8}$

*Phân tích:* BT 11, BT 12 kế thừa độ nhuần nhuyễn trong phương pháp chứng minh các BĐT có biến bị chặn trên một đoạn. Tuy vậy, HS cần linh hoạt, sáng tạo hơn khi xử lí dạng BT này, BĐT chỉ còn đối xứng hai biến hoặc không có biến nào đối xứng.

***

Trong các dạng toán trên, các BT đều là BT mở, HS có thể sáng tạo ra nhiều BT tương tự. Giáo viên đã đưa cho HS nhiều tình huống học tập để rèn luyện 3 yếu tố cơ bản của TDST là: *tính nhuần nhuyễn, tính mềm dẻo* và *tính độc đáo*. Từ các BĐT hai biến số, nâng lên BĐT ba biến số đối xứng, BĐT ba biến số không đối xứng. Đó chính là hình thức tăng dần độ khó, tăng dần kĩ năng giải toán cho HS. HS từ chỗ còn bỡ ngỡ với các phương pháp chứng minh BĐT, thông qua hệ thống bài tập, TDST của các em đã trở nên nhuần nhuyễn. Với BT mới, vẫn sử dụng phương pháp đó, HS lại phải linh hoạt hơn để đi đến lời giải cuối cùng. Nhờ tính mềm dẻo trong cách xử lí các BT, HS lại được rèn luyện tính sáng tạo, tìm ra cách giải độc đáo bởi các BT thường được thiết kế cho HS có thể giải theo nhiều cách khác nhau. Đặc biệt, có những BT yêu cầu HS phải tìm ra những liên tưởng mới, cách kết hợp mới. ❑

---

(1) Nguyễn Bá Kim - Vương Dương Minh - Tôn Thân. **Khuyến khích một số hoạt động trí tuệ của học sinh qua môn Toán ở trường trung học cơ sở**. NXB *Giáo dục*, H. 1998.

(2) Tôn Thân. *Xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo cho học sinh khá và giỏi toán ở trường trung học cơ sở ở Việt Nam (thể hiện qua chương "Các trường hợp bằng nhau của tam giác" ở lớp 7)*. Luận án phó tiến sĩ Khoa học sư phạm tâm lí, Viện Khoa học giáo dục, 1995.


**Tài liệu tham khảo**

1. Nguyễn Thái Hòe. **Các bài toán về giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất**. NXB *Giáo dục*, H. 2009.
2. Phan Huy Khải. **Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất**. NXB *Đại học quốc gia Hà Nội*, 2013.
3. Bùi Văn Nghị. **Giáo trình phương pháp dạy học những nội dung cụ thể**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2008.



SUMMARY

*The training for creative thinking of students through solving problems in Maths course at high schools is one of the solutions to improve teaching and learning quality at high schools. This article would recommend ways to dig in Maths exercises and organize creative thinking activities for students in the aspect of inequality.*