GIÚP SINH VIÊN HIỂU SÂU KHÁI NIỆM XÁC SUẤT THÔNG QUA NHỮNG TÌNH HUỐNG SAI LẦM VÀ NGHỊCH LÍ VỀ XÁC SUẤT

ThS. LÊ BÌNH DƯƠNG*

1. Xác suất (XS) của một sự kiện (tình huống giả định) là khả năng xảy ra sự kiện (tình huống giả định) đó, được đánh giá dưới dạng một số thực nằm giữa 0 và 1. Khi một sự kiện không thể xảy ra, XS của nó bằng 0; một sự kiện chắc chắn đã hoặc sẽ xảy ra, XS của nó bằng 1. Nếu một sự kiện có thể xảy ra hoặc cũng có thể không xảy ra, XS của nó sẽ lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1. Sự kiện nào được coi là càng dễ xảy ra, XS càng gần 1, ngược lại, nếu càng khó xảy ra thì XS càng gần về 0. XS của một sự kiện không nhất thiết phải là một hằng số, nó có thể thay đổi, phụ thuộc vào nhiều yếu tố. Trước khi nghiên cứu những sai lầm khi tính XS, chúng ta hãy xét xem XS phụ thuộc vào những yếu tố nào:

- *XS thay đổi theo thời gian.* Ví dụ, Barack Obama được bầu làm tổng thống Hoa Kì vào tháng 11/2008. Trước lúc bầu cử đã có sự cạnh tranh khốc liệt giữa ông ta và đối thủ chính là John McCain. Một người quan sát bên ngoài có nhận định là hai ông có khả năng được bầu cử ngang nhau (tức là XS được bầu của mỗi ông khoảng 50%). Nhưng khi kết quả bầu cử được công bố, XS được bầu của Obama chuyển thành 100%. Trước đó 1 năm, XS được bầu làm tổng thống của Barack Obama không phải 100%, cũng không phải 50%, mà là rất nhỏ.

- *XS phụ thuộc vào điều kiện (thông tin).* Điều đáng chú ý là, mọi XS đều có thể coi là XS có điều kiện, phụ thuộc vào một điều kiện nào đó hoặc được hiểu ngầm. Chẳng hạn, khi người lái xe khỏe mạnh tỉnh táo, XS xảy ra tai nạn sẽ thấp, vẫn người lái đó khi không tỉnh táo, XS xảy ra tai nạn sẽ cao hơn.

Ví dụ: Có ba người A, B, C bị bắt vào tù. Cai tù nhận được lệnh thả hai trong số ba người này ra. Người tù A bảo cai tù: hãy nói cho tôi biết tên 1 người được thả trong hai người B và C đi. Cai tù trả lời: anh đang có XS được thả là 2/3. Nếu tôi nói tên một người được thả trong số hai người B và C, giữa anh và người còn lại chỉ còn một người được thả nữa thôi, bởi vậy XS để anh được thả sẽ giảm xuống còn 1/2. Hỏi lí luận của cai tù như vậy có đúng không?

Lời giải: Vào thời điểm ban đầu, chưa có thông tin về người nào được thả hay không, thông tin duy nhất là 2 trong 3 người được thả. Bởi vậy, ta dễ dàng tính được XS được thả của mỗi người là: P(A) = P(B) = P(C) = 2/3. Trong hai người B và C, luôn có ít nhất 1 người được thả. Nếu người B được thả, XS được thả của B thay đổi thành 1, XS được thả của C khi đã biết B là: $P(C|B) = P((C|B)|A).P(A) + P((C|B)|\overline{A}).P(\overline{A}) = 0.2/3 + 1.1/3 = 1/3$. XS để A được thả vẫn giữ nguyên là 2/3.

Khi mới tiếp cận vấn đề, hầu hết mọi người đều thấy lập luận của cai ngục rất có lí nhưng lại là lập luận sai. Tuy nhiên, không dễ dàng để phát hiện ra cái sai đó.

- *XS phụ thuộc vào người quan sát.* Cùng một sự kiện, nhưng hai người quan sát khác nhau có thể tính ra hai kết quả XS khác nhau và đều "có lí", bởi vì họ dựa trên các thông tin và sự phân tích khác nhau. Trở lại ví dụ trên, với người bên ngoài thì P(A) = 2/3, nhưng đối với người cai tù thì P(A) không phải là 2/3, mà là 0 hoặc 1.

2. Sai lầm khi áp dụng các định nghĩa về XS

1) Định nghĩa cổ điển về XS

Định nghĩa: XS xuất hiện biến cố *A* trong một phép thử được xác định bởi công thức: $(A) = \frac{m}{n}$; trong đó: *n* là tổng số các kết cục đồng khả năng, *m* là số kết cục thuận lợi cho biến cố A xảy ra.

Định nghĩa cổ điển về XS có ưu điểm là cho phép tính XS một cách đơn giản và chính xác. Tuy nhiên, để áp dụng được, các kết cục của phép thử phải đồng khả năng. Do đó, sai lầm thường gặp của SV khi áp dụng định nghĩa cổ điển về XS cho trường hợp các kết cục không đồng khả năng, xác định sai không gian XS, đếm sai số khả năng,...

Ví dụ: Biết rằng cha mẹ của hoàng tử Romeo có 2 con. Hỏi, XS để hoàng tử Romeo có chị gái hoặc em gái là bao nhiêu? Có 2 đáp án sau:

Đáp án 1: Hoàng tử (H) có 1 người anh chị em ruột, khi đó, hoặc người đó là con trai (T), hoặc là con gái (G). Vậy, XS để người đó là con gái là 1/2.

* Khoa Văn hóa ngoại ngữ, Trường Đại học Chính trị

Đáp án 2: Có 4 khả năng cho 1 gia đình có 2 con: {T,T}, {T,G}, {G,T}, {G,G}. Vì hoàng tử là con trai (đây là điều kiện) nên loại đi khả năng {G,G}, nên có 3 khả năng còn lại là {T,T}, {T,G}, {G,T}. Trong số 3 khả năng đó, có 2 khả năng có con gái. Vậy, XS để hoàng tử có chị gái hoặc em gái là 2/3.

Hai đáp án khác nhau nên ít nhất 1 đáp án sai. Vậy, đáp án nào sai?

Lời giải: Khi đọc nghịch lí này, hầu hết mọi người đều thấy ngay đáp án thứ hai hợp lí hơn. Đọc kĩ đáp án 2, ta thấy {T,T} là một khả năng kép gồm 2 khả năng trong đó: hoàng tử Romeo hoặc là người con trai thứ nhất, hoặc là người con trai thứ hai. Do đó, phải tính {T, T} là 2 khả năng {H,T} và {T,H}. Tổng cộng vẫn có 4 khả năng và XS là 2/4 = 1/2.

Sai lầm ở đây là sai trong cách đếm số khả năng. Nếu biến đổi bài toán (BT) thành: một gia đình có 2 con, biết rằng ít nhất một trong hai con là con trai, hỏi XS để có con gái là bao nhiêu? Trong BT này thì XS sẽ là 2/3.

2) Định nghĩa thống kê về XS

Định nghĩa: Thực hiện lặp lại một phép thử nào đó *n* lần và có *m* lần biến cố *A* xuất hiện. Khi đó, *m* gọi là tần số xuất hiện biến cố *A*, tỉ số: $f_n(A)=\frac{m}{n}$ gọi là tần suất xuất hiện của biến cố *A*.

Theo định lí Bernoulli về luật số lớn, khi số lần phép thử tăng lên vô hạn thì $f_n(A)$ tiến đến một giới hạn xác định, giới hạn này gọi là XS của biến cố *A*. Do đó, *P(A)* được tính xấp xỉ bởi tần suất $f_n(A)$, khi *n* đủ lớn. Định nghĩa thống kê có thể khắc phục được nhược điểm của định nghĩa cổ điển về XS khi số kết cục không duy nhất đồng khả năng. Tuy nhiên, nó có nhược điểm là chỉ tính được giá trị xấp xỉ của *P(A)*. Để có kết quả tính *P(A)* chính xác, cần thực hiện số phép thử đủ lớn. Ví dụ sau sẽ cho thấy nhược điểm của định nghĩa thống kê:

Ví dụ (nghịch lí Simpson - thuốc nào tốt hơn?). Một người muốn nghiên cứu xác định xem giữa 2 loại thuốc cùng để chữa 1 bệnh, loại nào tốt hơn. Kết quả thống kê được ở bảng sau:

Giới tính	Kết quả	Thuốc I	Thuốc II
Nữ	Chữa được	150	15
	Không chữa được	850	285
Nam	Chữa được	190	720
	Không chữa được	10	180

Dựa vào bảng thống kê trên, có 2 câu trả lời trái ngược nhau như sau: - *Câu trả lời 1:* thuốc I đem cho 1.200 người dùng, chữa được bệnh cho 340 người. Thuốc II đem cho 1.200 người dùng, chữa được 735 người nên thuốc II tốt hơn; - *Câu trả lời 2:* Đối với nữ, tỉ lệ chữa được bệnh của thuốc I là 15%, của thuốc II là 5%. Đối với nam, tỉ lệ chữa được bệnh của thuốc I là 95%, của thuốc II là 80%. Trong hai trường hợp này, tỉ lệ chữa được bệnh của thuốc I cao hơn, nên thuốc I tốt hơn.

Trong hai câu trả lời trên, câu trả lời nào đáng tin? Nghịch lí nằm ở đâu?

Lời giải: Vấn đề nằm ở chỗ thuốc I được đem thử cho quá ít nam, quá nhiều nữ so với thuốc II, nên khi lấy tổng số các kết quả của các phép thử thì không phản ánh đúng tỉ lệ chữa được bệnh. Câu trả lời 1 là sai, câu trả lời 2 đáng tin hơn.

3) Định nghĩa hình học về XS

Định nghĩa: Cho H là miền chứa trong miền Ω. Chọn điểm *M* tùy ý trong Ω. XS *P(A)* để M thuộc miền H được xác định bởi: $P(A)=\frac{m(H)}{m(\Omega)}$; trong đó: *m(H) là độ đo hình học của miền H, $m(\Omega)$ là độ đo hình học của miền Ω.*

Để tính XS theo định nghĩa hình học, cần tính được *m(H)* và $m(\Omega)$. Trong thực tế, việc tính *m(H)* và $m(\Omega)$ không đơn giản. Ví dụ sau cho ta thấy tính bất định của XS khi các biến số thay đổi không được định nghĩa rõ ràng.

Ví dụ (nghịch lí Bertrand): Xét tam giác đều ABC nội tiếp trong một vòng tròn bán kính R. Giả sử, có một dây cung của vòng tròn được chọn bất kì. Tìm XS (kí hiệu là P(A)) để dây cung đó dài hơn cạnh của tam giác ABC.

Cách 1: Vẽ đường tròn tâm I bán kính R trên hệ tọa độ vuông góc xOy với tọa độ tâm I(R, R). Dây cung sẽ được tạo thành khi có một đường thẳng song song với trục tung và cắt đường tròn tại các điểm có hoành độ *x* thỏa mãn: $0\le x\le 2R$. Khi $\frac{R}{2}\le x\le\frac{3R}{2}$, dây cung dài hơn cạnh của tam giác đều nội tiếp đường tròn. Do đó: $P(A)=\frac{3R/2-R/2}{2R}=\frac{1}{2}$.

Cách 2: Trên đường tròn, chọn 1 điểm M bất kì, chọn điểm thứ hai là N khác với M. Hai điểm M, N tạo được một dây cung. Điểm N chạy trên đường tròn với góc chạy từ 0° đến 360° thì độ dài dây cung MN sẽ dao động từ 0 đến $2\pi R$. Trong khoảng góc chạy từ 120° đến 240° độ thì dây cung MN dài hơn cạnh của tam giác ABC. Tương ứng với góc chạy từ 120° đến 240° thì độ dài của dây cung là $2\pi R/3$.

Do đó: $P(A)=\frac{2\pi R/3}{2\pi R}=\frac{1}{3}$.

Cách 3: Chọn 1 điểm bất kì nằm bên trong đường tròn (I, R/2) và xét dây cung MN của đường tròn nhận điểm đó làm trung điểm. Dây cung MN dài hơn cạnh của tam giác đều khi trung điểm của nó nằm bên trong vòng tròn nhỏ (I, R/2). Suy ra: $P(A)=\frac{\pi(R/2)^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4}$.

Có 3 đáp án khác nhau nên đó là một nghịch lí. Nguyên nhân của sự khác nhau là ở cách chúng ta xác định cung ngẫu nhiên.

4) Công thức Bayes: *Giả sử* $A_1, A_2, ..., A_n$ *là một hệ biến cố đầy đủ, A là biến cố xảy ra đồng thời với một trong các biến cố* $B_1, B_2, ... B_n$ *và* $P(A) \neq 0$. *Khi đó, ta có:*

$$P(B_K/A)=\frac{P(B_K).P(A/B_K)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i).P(A/B_i)} \text{ với mọi } k=1,2,...,n$$

Công thức Bayes đơn giản nhưng có ý nghĩa rất sâu xa, một trong các lỗi người học thường gặp phải là nhầm lẫn giữa P(AIB) và P(BIA), hoặc cho rằng P(AIB) = P(BIA). Công thức Bayes đã cho thấy: P(AIB) = P(BIA) khi và chỉ khi P(A) = P(B).

Ví dụ: Giả sử có một loại bệnh mà tỉ lệ người mắc bệnh là 1/1000 và có một loại xét nghiệm, mà ai mắc bệnh khi xét nghiệm cũng ra phản ứng dương tính, nhưng tỉ lệ phản ứng dương tính nhầm là 5% (tức là trong số những người không bị bệnh, có 5% số người thử ra phản ứng dương tính). Hỏi, khi một người xét nghiệm bị phản ứng dương tính, khả năng mắc bệnh của người đó là bao nhiêu?

Lời giải thường gặp: Nhiều sinh viên sẽ trả lời ngay là: 95% (= 100% - 5%).

Lời giải đúng: Nếu kí hiệu K là biến cố "không bị bệnh", D là biến cố "phản ứng dương tính" thì con số 5% là XS có điều kiện P(D/K) (XS có phản ứng dương tính khi không bị bệnh), P(K/D) sẽ là XS không bị bệnh mà có phản ứng dương tính. Để tính P(K/D), ta sử dụng công thức Bayes:

$$P(K/D)=\frac{P(K).P(D/K)}{P(\overline{K}).P(D/\overline{K})+P(K).P(D/K)}$$

Ta có: P(D/K) = 5/100, P(K) = 1 - 1/1000 = 999/1000, $P(\overline{K})=1/1000$, $P(D/\overline{K})=1$ và $P(\overline{K})P(D/\overline{K})+P(K).P(D/K)$ = (1/1000).1 + (999/1000).(5/100) ≈ 51/1000. Suy ra: P(K/D) = (5/100).(999/1000)/(51/1000) ≈0,98.

Như vậy, trong số những người xét nghiệm cho kết quả dương tính, có khoảng 98% số người là không bị bệnh. Nói cách khác, khi xét nghiệm ra dương tính, XS để mắc bệnh chỉ có 2%.

5) Công thức Bernoulli: XS để trong n phép thử Bernoulli biến cố A xuất hiện k lần, được kí hiệu $P_n(k)$ và có công thức tính: $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ (*) với *k*= 0,1,2,..., *n*. Công thức (*) gọi là công thức Bernoulli.

Khi tính XS liên quan đến dãy phép thử Bernoulli, sai lầm sinh viên thường mắc phải là nhầm lẫn giữa XS của nhiều phép thử với XS của biến cố A trong mỗi phép thử, hoặc sai lầm liên quan đến tính độc lập của mỗi phép thử.

Ví dụ: Một bác sĩ có XS chữa khỏi bệnh là 0,8. Một số sinh viên kết luận rằng: cứ 10 người đến chữa bệnh thì có chắc chắn 8 người khỏi bệnh. Điều đó đúng không?

Lời giải: kết luận ở trên là sai bởi vì: khả năng một bệnh nhân được chữa khỏi là 0,8; nếu 10 người đến chữa thì số người khỏi có thể là 0 là 1,... là 9 thậm chí là 10; nhưng số người khỏi có khả năng cao nhất là 8 người. XS xảy ra trường hợp có 8 người khỏi bệnh là $C_{10}^8(0,8)^8(0,2)^2 \approx 0,302$, chứ không phải XS là 1.

***

Quá trình giải nhiều BT tính XS tưởng chừng như đơn giản nhưng lại rất dễ mắc sai lầm. Những sai lầm trong lời giải, các nghịch lí cho thấy, để khắc phục được sai lầm, sinh viên phải nắm vững khái niệm về XS, định nghĩa về XS; qua đó, tìm thấy sự thú vị của môn học này. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Lê Thị Hoài Châu. **Dạy học xác suất - Thống kê ở trường phổ thông**. NXB *Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh*, 2012.
2. Bùi Văn Nghị. **Phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2008.
3. Đỗ Đức Thái - Nguyễn Tiến Dũng. **Nhập môn hiện đại xác suất và thống kê**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2010.
4. Đào Hữu Hồ. **Hướng dẫn giải các bài toán xác suất - thống kê**. NXB *Đại học quốc gia*, H. 2007.

SUMMARY

Probability is a concept that most people are aware. But not everyone understands the basic nature of it. There is the problem of calculating the probability seemed very simple, but few people have studied the probability of making errors when asked, including graduate students in mathematics. Therefore, in this article will highlight the mistakes, the paradoxes of probability, especially conditional probability, to learners to avoid the most common basic errors.