RÈN LUYỆN CHO HỌC SINH MỘT SỐ HOẠT ĐỘNG TRÍ TUỆ NHẰM PHÁT TRIỂN KHẢ NĂNG CHIẾM LĨNH TRI THỨC TRONG DẠY HỌC HÌNH HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

TS. NGUYỄN HỮU HẬU* - ĐINH CÔNG VĂN**

Tâm lí học và lí luận dạy học hiện đại đã khẳng định rằng, con đường hiệu quả nhất để giúp học sinh (HS) nắm vững kiến thức và phát triển năng lực sáng tạo là phải đưa các em vào vị trí của chủ thể hoạt động (HĐ) nhận thức. HS thông qua HĐ tự lực, tự giác, tích cực của bản thân để thu nhận kiến thức. Để góp phần nâng cao khả năng chiếm lĩnh tri thức cho HS trong dạy học hình học ở trường phổ thông, giáo viên (GV) cần bồi dưỡng cho HS các dạng HĐ sau:

1. HĐ liên tưởng và huy động kiến thức

Sự phát triển nhận thức là quá trình tích lũy các mối liên tưởng. Trong quá trình tìm tòi cách thức để định hướng giải một bài toán (BT), nhiều khi chúng ta phải tiến hành biến đổi vấn đề đó thông qua các HĐ liên tưởng. Nhờ HĐ này, HS có thể chuyển đối tượng cần nghiên cứu sang đối tượng mới quen thuộc, dễ nghiên cứu hơn. Đi kèm với HĐ liên tưởng là khả năng huy động kiến thức và kĩ năng chuyển hóa các liên tưởng. Sự liên tưởng là từ sự việc này lại nhớ đến sự việc khác. Theo các nhà liên tưởng, có 4 loại liên tưởng: liên tưởng giống nhau, liên tưởng tương phản, liên tưởng gần nhau và liên tưởng nhân quả; trong đó, liên tưởng *nhân quả* có vai trò quan trọng trong quá trình HĐ trí tuệ. Các mối liên tưởng bị quy định bởi *sự linh hoạt* của các thành phần được liên tưởng và *tần suất* nhắc lại của chúng trong kinh nghiệm (1).

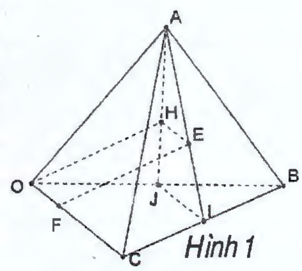
Trong HĐ giải toán có thể liên tưởng về cái *gần với nó* hoặc *trái với nó*. Sự liên tưởng về mặt phương pháp giải BT sẽ quyết định các phép biến đổi thông tin, nghĩa là biến đổi thông tin như thế nào để được BT có lợi hơn (có thể liên tưởng được). Theo (2), *phương thức liên tưởng có ba dạng thường gặp, đó là: liên tưởng định nghĩa, nguyên lí, định lí và quy tắc; liên tưởng đến những vấn đề đã từng giải quyết; liên tưởng đến phương pháp, kĩ xảo thường dùng.*

HĐ liên tưởng và huy động kiến thức có những đặc trưng sau: - Nhìn nhận BT dưới nhiều góc độ, từ đó tìm các cách giải BT; - Nhận dạng, phát hiện các cách thể hiện khác nhau của BT, sau đó nhấn mạnh khả năng ứng dụng của toán học bằng việc lựa chọn hệ thống bài tập để thấy được mối liên hệ giữa các nội dung kiến thức; - Biến đổi một BT, một vấn đề, sau đó huy động những kiến thức đã biết để giải; - Rèn luyện khả năng liên tưởng vấn đề, tìm nguồn gốc của kiến thức để huy động kiến thức; - Khai thác hợp lí hệ thống các BT gốc làm tiền đề cho việc tìm phương hướng giải quyết BT mới.

Ví dụ 1: Cho tứ diện OABC, trong đó, OA, OB, OC đôi một vuông góc và OA= OB=OC=a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AI, OC.

Trước khi yêu cầu HS giải BT này, GV định hướng cho các em xây dựng quy trình dựng đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau trong trường hợp tổng quát, từ cách dựng đó, HS sẽ liên tưởng đến các cách giải khác nhau của BT.

Hướng thứ nhất: Liên tưởng khoảng cách giữa hai đường chéo nhau như là khoảng cách từ một điểm thuộc đường này tới mặt phẳng song song chứa đường kia, cụ thể trong trường hợp này là liên tưởng khoảng cách giữa 2 đường thẳng chéo nhau AI và OC tới khoảng cách từ 1 điểm thuộc 1 đường thẳng (chẳng hạn $O \in OC$) đến mặt phẳng song song với đường thẳng đó và chứa đường thẳng còn lại (mặt phẳng (AIJ)).



Hình 1

Qua I kẻ IJ // OC ($J \in OB$). Gọi (P) là mặt phẳng qua AI, IJ, khi đó (P) // OC. Vậy, d (AI, OC) = d (OC, (P)) = d(O, (P)) (ý tưởng chính của cách giải thứ nhất) (*hình 1*). Kẻ $OH \perp AJ$ $(H \in AJ) \Rightarrow OH \perp (AIJ)$ hay $OH \perp (P)$.

Suy ra: $d(AI, OC) = d((P), OC) = d((P), O) = OH = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

* Trường Đại học Hồng Đức
** Cao học K19, Trường Đại học Vinh

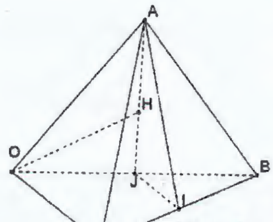
Hướng thứ hai: Huy động kiến thức dựng đường vuông góc chung trong trường hợp tổng quát. HS dựng đường vuông góc chung của hai đường thẳng AI và OC. Qua I kẻ đường thẳng $IJ // OC$ $(J \in OB)$; qua O kẻ đường thẳng $OH \perp AJ$ $(H \in AJ)$; qua H kẻ đường thẳng $HE // IJ$ $(E \in AI)$; qua E kẻ đường thẳng $EF // OH$ $(F \in OC)$.

Khi đó, EF là đoạn vuông góc của AI và OC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và OC là: d (AI, OC) = EF = OH, trong đó:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OJ^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Vậy $d(AI, OC) = \frac{a}{\sqrt{5}}$.

Hướng thứ ba: Liên tưởng đến khoảng cách của hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng cần tính khoảng cách. Cụ thể: xem khoảng cách giữa hai đường thẳng AI và OC là khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song với nhau lần lượt chứa hai đường thẳng AI, OC. Từ I, kẻ IJ//OC $(J \in OB)$(*hình 2*). Gọi (P) là mặt phẳng qua AI và IJ, (Q) là mặt phẳng qua OC và song song với mp (P). Ta có: $d(OC, AI) = d((P), (Q)) = d(O, (P)) = OH = \frac{a}{\sqrt{5}}$.



Hình 2

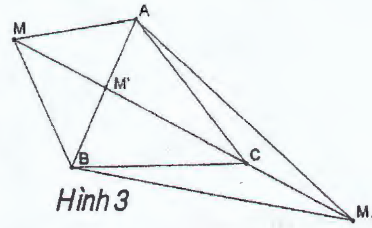
2. HĐ suy luận có lí và dự đoán

Suy luận có lí có vai trò quan trọng trong quá trình tìm tòi và dự đoán. Trong toán học, suy luận có lí thường được thể hiện dưới các hình thức như: đặc biệt hóa, tương tự hóa, khái quát hóa, quy lạ về quen,... Trên cơ sở dự đoán, HS có thể định hình được con đường để khám phá tri thức. GV cần hướng cho HS dự đoán có mục đích rõ ràng, hợp lí. Để từ sự dự đoán hợp lí, HS có thể đưa ra những suy luận có lí và vận dụng khéo léo các phép quy nạp, tương tự,...

"Dự đoán là một phương pháp tư tưởng được ứng dụng rộng rãi trong nghiên cứu khoa học. Đó là căn cứ vào các nguyên lí và sự thật đã biết để nêu lên những hiện tượng và quy luật chưa biết. Hay, dự đoán là sự nhảy vọt từ giả thuyết sang kết luận" (2).

HĐ suy luận có lí và dự đoán có một số đặc trưng sau: - Quan sát hay khảo sát một số trường hợp riêng và mô tả những điều quan sát hay khảo sát đó; - Vận dụng những tri thức đã có để giải thích điều vừa quan sát hay khảo sát được; - Dựa vào điều vừa giải thích để tạo ra một giả thuyết dự đoán (ở bước này, GV cần khuyến khích HS hay các nhóm HS hợp tác với nhau, đưa ra nhiều giả thuyết dự đoán); - Kiểm tra giả thuyết: chấp nhận hay bác bỏ giả thuyết dự đoán (GV cần khuyến khích, tạo điều kiện cho HS tranh luận nhằm bác bỏ ý kiến của bạn hoặc bảo vệ ý kiến của mình hay của nhóm mình. Tương ứng với các HĐ của GV, HS phải huy động kiến thức và dùng lập luận logic để khẳng định tính đúng đắn của các dự đoán, qua đó, xác lập tri thức mới); - Phát biểu các giả thuyết dự đoán đã được kiểm chứng; - Chứng minh các giả thuyết dự đoán bằng suy diễn.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng chứa tam giác ABC, tìm điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M tới các đỉnh của tam giác là bé nhất.



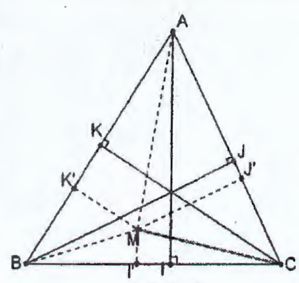
Hình 3

Đây là một BT khó, bởi giả thiết của BT không chỉ rõ trong mặt phẳng có tồn tại điểm M thỏa mãn điều kiện hay không, nếu có thì đó là điểm nào. Vì vậy, chúng ta sẽ tìm cách dự đoán vị trí của điểm phải tìm (nếu có) bằng cách mò mẫm từ các trường hợp đặc biệt.

Đầu tiên, xét trường hợp điểm M nằm ngoài tam giác ΔABC, khi đó, xảy ra hai trường hợp: - Một trong ba đoạn MA, MB, MC cắt một cạnh của ΔABC tại M'. Lúc đó, MA + MB + MC > M'A + M'B + M'C.; - Cả ba đoạn MA, MB, MC không cắt các cạnh của ΔABC ($M = M_1$, xem *hình 3*), ta được: MA + MB + MC > CA + CB.

Vậy, điểm cần tìm phải nằm ở miền trong hoặc trên các cạnh của ΔABC.

- *Trường hợp 1:* ABC là tam giác đều. Do tính đối xứng của tam giác đều nên điểm cần tìm (nếu có) sẽ có tính chất đối xứng đối với 3 đỉnh. Mặt khác, trong tam giác đều có một điểm O vừa là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, vừa là trọng tâm, trực tâm, nên ta dự đoán O là điểm cần tìm, nghĩa là OA + OB + OC < MA + MB + MC với M là một điểm bất kì khác O nằm trong ΔABC (*hình 4*).



Hình 4

Ta sẽ chứng minh

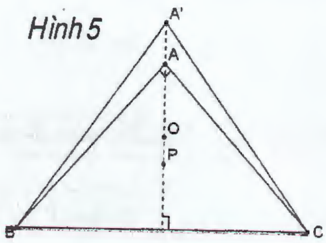
điều này: từ M vẽ $MI' \perp BC$; $MJ' \perp AC$; $MK' \perp AB$. Ta có: $OA + OI < MA + MI'$; $OB + OJ < MB + MJ'$; $OC + OK < MC + MK'$. Do đó:

$$OA + OB + OC + OI + OJ + OK < MA + MB + MC + MI' + MJ' + MK';$$

mà $OI + OJ + OK = MI' + MJ' + MK'$ (vì ΔABC đều) nên $OA + OB + OC < MA + MB + MC$. BT đã giải xong trong trường hợp ΔABC đều.

- *Trường hợp 2:* ABC là tam giác cân. HS tiếp tục mò mẫm vì trong tam giác cân, các điểm đặc biệt đều nằm trên đường cao ứng với đáy nên có thể sẽ dễ khảo sát hơn. Để dễ tính toán, ta lại chọn tam giác vuông cân có độ dài cạnh góc vuông bằng 1 đơn vị, trực tâm là đỉnh A, tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm G của BC, trọng tâm P, tâm đường tròn nội tiếp Q. Khi đó: $GA + GB + GC = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 2 = AB + AC$.

Hình 5



Vì vậy, tâm G của đường tròn ngoại tiếp ΔABC không phải là điểm cần tìm. Tiếp tục so sánh:

$$PA = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3};\; PB = PC = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$ Suy ra:

$$PA + PB + PC = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{3} < 2 =$$

AB + AC. Do đó, trực tâm của tam giác ABC cũng không phải là điểm cần tìm.

Tiếp theo, xét tâm đường tròn nội tiếp Q của ΔQBC. Có thể so sánh tổng (PA + PB + PC) với tổng (QA +QB + QC) để loại trừ bớt một trong hai điểm P và Q. Nhưng việc so sánh này khá phức tạp. Dựng tam giác đều A'BC có tâm O (*hình 5*), theo kết quả chứng minh trên ta có: $OA' + OB + OC < PA' + PB + PC$, trừ vào hai vế cho AA' ta được: $OA + OB + OC < PA + PB + PC$. Vậy, P không phải là điểm cần tìm. Phải chăng điểm cần tìm là điểm O? Ta sẽ chứng minh O là điểm cần tìm. Lấy M bất kì trong ΔABC, $M \neq O$, ta có: $OB + OC + OA' < MB + MC + MA' \Rightarrow OB + OC + OA = OB + OC + OA' - AA' < MB + MC + MA' - AA' < MB + MC + MA$ (vì $MA' - AA' < MA$).

Trong ΔABC, điểm O có tính chất gì? Bằng tính toán và suy luận, HS có thể suy ra được ngay O là điểm nhìn các cạnh của ΔABC dưới cùng một góc là 120^0 (đây là một điều bất ngờ với HS).

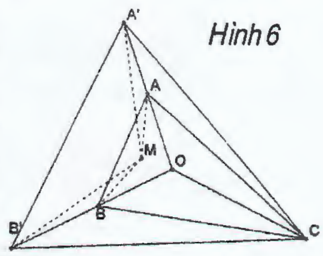
- *Trường hợp tổng quát:* ABC là tam giác bất kì. Giả sử có điểm O sao cho: $\widehat{BOA} = \widehat{COB} = \widehat{AOC} = 120°$. Ta chứng minh $OA + OB + OC < MA + MB + MC$ với $\forall M \neq O$.

Thật vậy, áp dụng kết quả của trường hợp tam giác vuông cân: kéo dài OA về phía A, OB về phía B (*hình 6*) để có $OA' = OB' = OC$ (giả sử $OC > OA \geq OB$). Tam giác A'B'C đều nên: $OA' + OB' + OC < MA' + MB' + MC$. Vì vậy: $OA + OB + OC = (OA' - AA') + (OB' - BB') + OC < MA' - AA' + MB' - BB' + MC < MA + MB + MC$ (do $MA' - AA' < MA$; $MB' - BB' < MB$). Ta được điều phải chứng minh.

Nếu trong ΔABC không có điểm O nhìn 3 cạnh dưới cùng một góc, tức là nếu ΔABC có một góc $\geq 120^0$, thì điểm cần tìm là điểm nào?

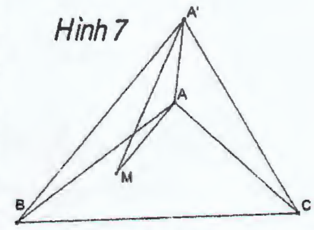
Nếu $A = 120^0$, có thể xem A như là một điểm "giới hạn", nhìn ba cạnh của ΔABC dưới cùng một góc nên ta sẽ chứng minh A là điểm cần tìm. Vẽ AA' sao cho: $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AC} = 120°$ (*hình 7*). Trong $\Delta A'BC$, điểm A là điểm nhìn ba cạnh của tam giác dưới cùng một góc nên: $AA' + AB + AC < MA' + MB + MC \Rightarrow AB + AC < MA' - AA' + MB + MC < MA + MB + MC$.

Hình 6



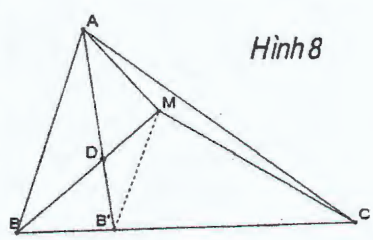
Nếu $A > 120^0$, phải chăng A là điểm cần tìm? Muốn chứng minh điều này, ta tìm cách vận dụng trường hợp $A = 120^0$: vẽ AB' sao cho $\widehat{B'AC} = 120^0$ (*hình 8*), khi đó: $AB' + AC < MA + \widehat{MB' + MC}$. HS cần chứng minh: $AB + AC < MA + MB + MC$ hay $AB' + AC + (AB - AB') < MA + MB' + MC + (MB - MB')$

Hình 7



Vậy, ta chỉ cần chứng minh $AB - AB' < MB - MB'$ hay $AB + MB' < AB' + MB$. Điều này đúng vì trong hai tam giác DAB và DMB' (D là giao của AB' và MB) có: $AB' + MB = (AD + DB') + (BD + DM) = (AD + DB) + (DB' + DM) > AB + MB'$

Hình 8



Nếu điểm M nằm trong tam giác AB'B, vẽ AC' (C' trên cạnh BC) sao cho $\widehat{BAC'} = 120^0$ và chứng minh như trên. Cách giải này có được là nhờ vào quá trình mò mẫm, dự đoán dựa trên các trường hợp đặc biệt. Chúng ta đã bắt đầu từ trường hợp đơn giản nhất là tam giác đều để đi đến *dự đoán*: điểm cần tìm có thể là tâm đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm. Sau đó tiếp tục xét BT trong các trường hợp đặc biệt khác để thấy điểm cần tìm không phải là một trong các điểm đã dự đoán (trong bước này HS đã điều chỉnh dự đoán của mình). Cuối cùng, sử dụng các phương pháp chứng minh trong hai trường hợp đặc biệt để giải BT tổng quát.

Theo (3), *thực ra cho HS mò mẫm, tìm tòi dự đoán đúng là tốn thời gian, nhưng sẽ được đền bù nhanh chóng khi tư duy độc lập của HS đã được phát triển.* Quá trình tìm tòi lời giải BT trên cũng khẳng định rằng, chúng ta đã không lãng phí thời gian khi xét BT trong trường hợp đặc biệt. Với những HS đã học phép biến hình trong mặt phẳng, GV có thể định hướng để các em có thể đưa ra lời giải ngắn gọn hơn nhiều. Tùy vào khả năng liên tưởng và vốn kiến thức cơ bản mà HS sẽ có cách tiếp cận BT khác nhau. Tuy nhiên, dù đi theo hướng nào cũng đòi hỏi người học phải trải qua quá trình tìm tòi, dự đoán dựa trên các trường hợp đặc biệt hay tương tự. Nếu BT đã cho không phải dưới dạng tìm kiếm mà thay bằng: *"Chứng minh rằng: Nếu ΔABC có ba góc < 120^o, O là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^o$, thì O là điểm có tổng khoảng cách đến các đỉnh của tam giác là bé nhất. Nếu ΔABC có một góc $\geq 120^o$ thì đỉnh của góc này là điểm có tổng khoảng cách đến các đỉnh của tam giác là bé nhất"* - đây sẽ là một BT không khó với HS.

Ngoài ra, GV cần chú trọng và sử dụng một cách hợp lí các phương tiện trực quan (như đồ dùng dạy học, hình vẽ, tranh ảnh, các phần mềm toán học chuyên dụng) giúp HS thuận lợi hơn trong việc dự đoán, phát hiện, nắm bắt và giải quyết vấn đề.

* * *

Phát hiện được những HĐ trí tuệ tương thích với một nội dung kiến thức nào đó là đã chỉ ra được một con đường để người học chiếm lĩnh tri thức và cũng là một cách để kiểm tra xem mục tiêu dạy học có đạt được hay không, đạt được đến mức độ nào. Trong quá trình tổ chức dạy và học môn *Toán*, GV cần quan tâm đến các HĐ như: suy luận có lí và dự đoán, liên tưởng và huy động kiến thức nhằm giúp HS chiếm lĩnh tri thức, khám phá và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo và linh hoạt. ❑

---

(1) Phan Trọng Ngọ (chủ biên) - Dương Diệu Hoa - Nguyễn Lan Anh. **Tâm lí học trí tuệ**. NXB *Đại học quốc gia*, H. 2001.

(2) Đào Văn Trung. **Làm thế nào để học tốt Toán phổ thông**. NXB *Đại học quốc gia*, H. 2001.

(3) Hoàng Chúng. **Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông trung học cơ sở**. NXB *Giáo dục*, H. 1994.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2008.

SUMMARY

The aim of this paper is to clarify reasonable inferences activities and predictions; associated activities and mobilization of knowledge mentioned in the teaching of Mathematics. With this aim, the author of the article identify specific types of these activities through specific examples. As a result, to help students gain the needed skills to mobilize knowledge, explore and solve Math problems with flexibility, creativity.

Sử dụng phép tương tự...

(Tiếp theo trang 54)

minh thông qua những chức năng của nó. Hơn nữa, phạm vi sử dụng của PTT không chỉ hạn hẹp cho chủ đề *Phân số* mà còn mở rộng cho các chủ đề toán học khác. Do vậy, phép suy luận này cần được vận dụng nhiều trong hoạt động giảng dạy toán. ❑

---

(1) Hoàng Chúng. **Logic học phổ thông**. NXB *Giáo dục*, H.1997.

(2) Nguyễn Phú Lộc. **Dạy học hiệu quả môn Giải tích trong trường phổ thông**. NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2010.

Tài liệu tham khảo

1. Đỗ Đình Hoan (chủ biên). **Toán 4**. NXB *Giáo dục*, H. 2006.

SUMMARY

In teaching mathematics, teachers can use many different reasoning ways to guide students to search for new knowledge. For example: inductive reasoning, deductive reasoning, analogy, analysis, synthesis, etc. We are particularly interested in analogy because it has many useful roles. This will be presented through using analogy in teaching the subject of fractions in primary school.