CÁC THAO TÁC TƯ DUY PHÂN TÍCH, TỔNG HỢP, SO SÁNH TRONG DẠY HỌC ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH Ở TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

O NGUYỄN THỊ MỸ HẰNG*

Quá trình tư duy của chủ thể nhận thức khi giải quyết một nhiệm vụ, một vấn đề nào đó bao gồm nhiều giai đoạn. Các giai đoạn của quá trình tư duy chỉ phản ánh được cấu trúc bên ngoài, còn nội dung bên trong của quá trình đó lại là một quá trình phức tạp, diễn ra dựa trên các *thao tác tư duy*. Trong tâm lí học, các *thao tác tư duy cơ bản* bao gồm *phân tích, so sánh, tổng hợp, tương tự hóa, trừu tượng hóa, khái quát hóa, đặc biệt hóa*. Bài viết đề cập tới việc rèn luyện cho học sinh (HS) trung học phổ thông (THPT) các thao tác tư duy: *phân tích, tổng hợp* và *so sánh*.

1. Các khái niệm cơ bản

Phân tích là quá trình dùng trí óc tách cái toàn thể ra từng bộ phận theo một dấu hiệu và thuộc tính của chúng để nghiên cứu, giải quyết vấn đề một cách đầy đủ và sâu sắc hơn. *Tổng hợp* là quá trình dùng trí óc liên kết những bộ phận, thuộc tính, những thành phần đã được phân tách thành một chỉnh thể thống nhất, đem lại một kết quả mới về một sự vật, một hiện tượng nào đó. Phân tích và tổng hợp là hai hoạt động trí tuệ trái ngược nhau nhưng lại là hai mặt của một quá trình thống nhất. Sự tổng hợp như là một kết quả của quá trình phân tích. Những hoạt động trí tuệ khác đều được diễn ra trên nền tảng của sự phân tích và tổng hợp. *So sánh* là xác định những điểm giống và khác nhau giữa các sự vật và hiện tượng.

Trong dạy học Toán ở phổ thông, nhờ có sự so sánh mà HS có thể quan sát trực tiếp các đặc điểm giống và khác nhau bên ngoài của các sự vật, hiện tượng cũng như các dấu hiệu, quan hệ bên trong không nhận thức được trực tiếp mà phải thông qua các hoạt động của tư duy.

2. Một số biện pháp sư phạm nhằm rèn luyện các thao tác tư duy phân tích, tổng hợp và so sánh cho HS THPT

Biện pháp 1: Khi dạy học khái niệm (định lí, quy tắc) mới, giáo viên (GV) cần hướng dẫn HS so sánh với các khái niệm (định lí, quy tắc) đã biết để nhận ra những điểm giống và khác nhau; qua đó, giúp HS nắm vững và khắc sâu kiến thức một cách có hệ thống.

Ví dụ: Khi dạy học về cấp số cộng, GV có thể lập bảng (hoặc hướng dẫn HS khám phá dựa trên các ví dụ cụ thể) so sánh định nghĩa, tính chất của cấp số cộng, cấp số nhân để thấy được những điểm giống và khác nhau của hai dãy số này.

Cấp số cộng	Cấp số nhân
- Là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng *tổng* của số hạng đứng ngay trước nó với một số d không đổi: $u_n = u_{n-1} + d, \forall n \geq 2$	- Là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng *tích* của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi: $u_n = u_{n-1}.q,\ \forall n \geq 2$
- Số hạng tổng quát được biểu diễn theo số hạng đầu u_1 và *công sai d*: $u_n = u_1 + (n-1)d, \forall n \geq 2$	- Số hạng tổng quát được biểu diễn theo số hạng đầu u_1 và *công bội* q: $u_n = u_1.q^{n-1},\ \forall n \geq 2$.
- *Mỗi số hạng* (kể từ số hạng thứ hai và trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là *trung bình cộng* của hai số hạng đứng kề với nó: $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}, \forall k \geq 2$	- *Trị tuyệt đối của mỗi số hạng* (kể từ số hạng thứ hai và trừ số hạng cuối cùng đối với cấp số nhân hữu hạn) đều là *trung bình nhân* của hai số hạng đứng kề nó $\lvert u_k \rvert = \sqrt{u_{k-1}u_{k+1}}, \forall k \geq 2$
- Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có thể biểu diễn theo số hạng đầu u_1 và công sai d: $S_n = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2}$	- Tổng n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$ được tính theo công thức: $S_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$

Biện pháp 2: Luyện tập cho HS so sánh các sự vật, hiện tượng có hình thức bên ngoài khác nhau, nhưng có bản chất là giống nhau, thậm chí chỉ là một và ngược lại.

Ví dụ 1: Xét hai khai triển sau:

$$a)\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

* Trường Đại học Vinh

b) $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$

Có nhiều HS cho rằng, hai khai triển trên là khác nhau vì một khai triển của tổng, một khai triển của hiệu nhưng thực chất chỉ là một vì *a + b = a - (-b)*, khai triển này được suy ra từ khai triển kia bằng cách thay *b* bởi *- b*.

Ví dụ 2: Sau khi học giới hạn của dãy số, HS đã công nhận kết quả $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Tiếp đó, khi học giới hạn của hàm số, GV giao nhiệm vụ cho HS tìm $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$. Đã có nhiều HS trả lời rằng hiển nhiên giới hạn đó cũng bằng 0. Về mặt hình thức, hai giới hạn đó có vẻ giống nhau nhưng bản chất của chúng lại khác nhau. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ cũng có giá trị là 0 nhưng với cách giải thích khác: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ vì $\forall(x_n), x_n\to+\infty$ thì $\frac{1}{x_n}\to 0$. Dãy $x_n = n$ chỉ là một trong các dãy có tính chất này.

Biện pháp 3: *Luyện tập cho HS phân tích để so sánh các sự vật, hiện tượng theo nhiều khía cạnh khác nhau, xét ở khía cạnh này thì chúng giống nhau nhưng nếu xét ở khía cạnh khác thì khác nhau.*

Chúng ta xét hai bài toán sau:

Bài toán 1: Giải phương trình (PT):

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left[\sqrt{(1-x)^3}-\sqrt{(1+x)^3}\right]=2+\sqrt{1-x^2} \quad (1).$$

Điều kiện của bài toán: $|x|\le 1$.

Lời giải: Đặt $x=\cos t, 0\le t\le\pi$. Khi đó PT (1) có thể viết dưới dạng PT lượng giác sau:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\cos^2 t}}\left[\sqrt{(1-\cos t)^3}-\sqrt{(1+\cos t)^3}\right]=2+\sqrt{1-\cos^2 t}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+\sin t}\left[\sqrt{(1-\cos t)^3}-\sqrt{(1+\cos t)^3}\right]=2+\sin t$$

Vì: $\sqrt{1+\sin t}=\sqrt{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right|=\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}$, ta thu được PT:

$$\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right).2\sqrt{2}.\left(\sin^3\frac{t}{2}-\cos^3\frac{t}{2}\right)=2+\sin t \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\right)(2+\sin t)=(2+\sin t)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin^2\frac{t}{2}-\cos^2\frac{t}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{2}\cos t=1\Leftrightarrow \cos t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy, PT (1) có nghiệm là $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bài toán 2: Tính tích phân $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

Lời giải: Đặt x = 2cos*t*, với $t\in[0;\pi]$. Khi x = 0 thì $t=\frac{\pi}{2}$; khi x = 1 thì $t=\frac{\pi}{3}$, *dx* = -2sin*tdt*.

Ta có: $\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos^2 t.2\sin t\,dt}{2\sin t}=2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nếu xét ở khía cạnh *nội dung*, hai bài toán trên hoàn toàn khác nhau, *bài toán 1* là giải *PT* *còn bài toán 2* là *tính tích phân*. Nhưng nếu xét ở khía cạnh phương pháp giải thì 2 bài toán có điểm chung, đó là đều sử dụng phương pháp *lượng giác hóa*. Dấu hiệu để thực hiện phương pháp *lượng giác hóa* trong các bài toán trên là xuất hiện biểu thức dạng $\sqrt{a^2-x^2}$.

Biện pháp 4: *Hướng dẫn HS tìm tòi các lời giải khác nhau của cùng một bài toán, phân tích, đánh giá các lời giải và tổng hợp lại để tìm lời giải tối ưu.*

Ví dụ: Giải PT $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}=1$ (1).

Cách 1: Điều kiện của PT: $x\ge\frac{1}{2}$.

Với điều kiện đó, PT đã cho tương đương với:

$$4x-1+4x^2-1+2\sqrt{4x-1}\sqrt{4x^2-1}=1 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{4x-1}\sqrt{4x^2-1}=-4x^2-4x+3 \quad (2).$$

Để PT (2) có nghiệm, trước hết $-4x^2-4x+3\ge 0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\le x\le\frac{1}{2}$. Do điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$ nên chỉ có nghiệm $x=\frac{1}{2}$ là thỏa mãn điều kiện bài toán. Nghiệm $x=\frac{1}{2}$ cũng thỏa mãn PT (1). Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT.

Cách 2: Điều kiện của PT: $x\ge\frac{1}{2}$.

PT đã cho tương đương với: $\sqrt{4x-1}-1+\sqrt{4x^2-1}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2(2x-1)}{\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{2x-1}\sqrt{2x+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}\left(\frac{2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{2x+1}\right)=0.$$

Do $\frac{2}{\sqrt{4x-1}+1}+\sqrt{2x+1}>0$ nên PT tương đương với $\sqrt{2x-1}=0$ hay $x=\frac{1}{2}$.

Cách 3: Điều kiện của PT: $x\geq\frac{1}{2}$.

Vì điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$ nên $\sqrt{4x-1}\geq1$ và $\sqrt{4x^2-1}\geq0$, ta suy ra $\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}\geq1$.

Do đó, PT (1) tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt{4x-1}=1\\ \sqrt{4x^2-1}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Cách 4: Điều kiện của PT: $x\geq\frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{4x-1}+\sqrt{4x^2-1}$ trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$, có $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x-1}}+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}>0,\forall x>\frac{1}{2}$. Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. Vì $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ nên $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của PT. Với $x\geq\frac{1}{2}$ thì $f(x)>f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ nên mọi *x* thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ không phải là nghiệm của PT. Vậy $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

Phân tích, đánh giá các cách giải: Cách 1 HS thường áp dụng khi giải PT vô tỉ chứa căn thức bậc 2, tức là bình phương hai vế không âm để làm mất dấu căn, cô lập căn thức để đưa về dạng cơ bản $\sqrt{f(x)}=g(x)$. Tuy nhiên, ở bài toán này, nếu chỉ chú trọng vào việc giải PT *f(x)* = *g²(x)* thì HS sẽ gặp khó khăn, các em cần dựa vào điều kiện có nghiệm của PT (2) và điều kiện $x\geq\frac{1}{2}$ để giải. Ở cách giải thứ 2, HS cần nhận thấy $x=\frac{1}{2}$ là một nghiệm của PT đã cho, vì vậy có thể biến đổi PT về dạng $\sqrt{2x-1}.g(x)=0$. *Cách 3* là một cách giải độc đáo. Quan sát, phân tích, đánh giá các biểu thức có mặt trong PT cùng với điều kiện của bài toán ta được $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT. Với *cách 4,* HS gặp phải khó khăn khi bình phương hai vế, các em sẽ liên tưởng tới việc sử dụng tính đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Việc phân tích, đánh giá các lời giải sẽ giúp HS nắm vững hơn các cách giải, khi giải các PT khác hoặc các dạng toán khác, các em sẽ có nhiều hướng suy nghĩ, linh hoạt chuyển hướng tư duy khi gặp khó khăn, chọn được phương án tốt nhất để giải quyết vấn đề.

* * *

Trong dạy học toán, nếu GV tổ chức cho HS tập luyện các thao tác tư duy nói chung, các thao tác phân tích, tổng hợp, so sánh nói riêng sẽ giúp các em hiểu được bản chất của vấn đề, củng cố kiến thức, hình thành những biểu tượng phong phú, trực quan về kiến thức đã học, biết vận dụng vào các tình huống thực tiễn. ❑

Tài liệu tham khảo

1. M. N. Sacdacop. **Tư duy của học sinh.** NXB *Giáo dục*, H. 1970.
2. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán.** NXB *Đại học sư phạm*, H. 2002.

SUMMARY

Analysis, synthesis and comparison are three of the basic operations of thinking. Thanks to analysis, synthesis and comparison that one can study things, phenomena, relations with their similar and different, general and specific signs. This article has proposed some pedagogical measures aimed at training these operations for students.

THỂ LỆ VIẾT VÀ GỬI BÀI

1. Nội dung bài viết thuộc các lĩnh vực:
- Quản lí giáo dục;
- Tâm lí học - sinh lí học lứa tuổi;
- Lí luận giáo dục;
- Lí luận dạy học;
- Giáo dục nước ngoài; v.v...

2. Bài viết:
- Mỗi bài viết không quá 6 trang, khổ A4; phông chữ Times New Roman (Unicode), cỡ chữ 14.
- Tên bài báo và tóm tắt nội dung bài báo trình bày bằng 2 thứ tiếng: tiếng Việt và tiếng Anh.
- Tác giả gửi *bản in* bài viết và *tập tin* bài viết đến Toà soạn (theo địa chỉ Ban biên tập ghi trên ***trang mục lục*** của Tạp chí).
- Chú thích trong bài đánh số theo thứ tự xuất hiện
- Tài liệu tham khảo và chú thích ghi ở cuối bài (trình tự: tên tác giả - tên sách/bài báo/văn bản pháp quy - nhà xuất bản - nơi và năm xuất bản).
- Toà soạn không trả lại bài viết nếu không được đăng

3. Để tiện liên hệ, tác giả cần ghi rõ địa chỉ công tác, số điện thoại, email vào cuối bài.

TẠP CHÍ GIÁO DỤC