BỒI DƯỠNG TƯ DUY SÁNG TẠO CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

TS. NGUYỄN THANH HƯNG* - TRẦN XUÂN THÀNH**

Tư duy sáng tạo (TDST) là một dạng tư duy nhằm tạo ra ý tưởng mới, giải pháp mới để giải quyết vấn đề. Một số đặc trưng cơ bản của TDST như: *tính mềm dẻo* (chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, nhận ra vấn đề mới trong những điều kiện quen thuộc,...), *tính nhuần nhuyễn* (tìm ra nhiều giải pháp trên các góc độ và tình huống khác nhau, nghiên cứu đối tượng ở nhiều khía cạnh,...), *tính nhạy cảm* (nhanh chóng phát hiện vấn đề, tìm mâu thuẫn, dự đoán hướng giải quyết vấn đề,...), *tính độc đáo* (tìm ra các mối liên hệ, những giải pháp mới lạ,...) và *tính hoàn thiện* (khả năng lập kế hoạch, phối hợp giữa ý nghĩ và hành động, phát triển ý tưởng, kiểm tra và kiểm chứng ý tưởng,...).

Trong dạy học môn Toán phần *Hình học* ở trung học phổ thông, theo chúng tôi, cần bồi dưỡng TDST cho HS theo một số biện pháp sau:

1. Tập luyện cho HS biết vận dụng các thao tác tư duy (so sánh, phân tích, tổng hợp, trừu tượng hóa, khái quát hóa,...) một cách nhuần nhuyễn, mềm dẻo và linh hoạt. Biện pháp này giúp HS tìm hướng giải các bài toán hoặc dự đoán cách giải, phát hiện vấn đề mới, tìm thấy sự liên hệ giữa các vấn đề với nhau. Nhờ đó, HS có thể mở rộng, nghiên cứu sâu nội dung kiến thức mà GV đưa ra để giải quyết vấn đề, hoặc xét những trường hợp đặc biệt của vấn đề, một số hướng khai thác trong biện pháp này là:

1) Hướng dẫn HS nghiên cứu sâu, mở rộng bài toán: Ta xuất phát từ bài toán sau: *Bài toán 1*: Cho tam giác ABC. Gọi O là điểm nằm trong tam giác ABC, S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OAC, OAB, ABC (*hình 1*). Chứng minh rằng: $S_1.\overrightarrow{OA}+S_2.\overrightarrow{OB}+S_3.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (1).

Chứng minh: (1) $\Leftrightarrow \frac{S_1}{S}.\overrightarrow{OA}+\frac{S_2}{S}.\overrightarrow{OB}+\frac{S_3}{S}.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (trong đó: $S_1+S_2+S_3=S$)

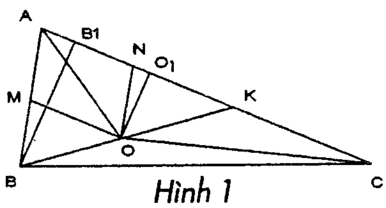
$$\Leftrightarrow \frac{S_1}{S}.\overrightarrow{AO}=\frac{S_2}{S}.\overrightarrow{OB}+\frac{S_3}{S}.\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \frac{S_1}{S}.\overrightarrow{AO}=\frac{S_2}{S}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\frac{S_3}{S}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_1+S_2+S_3}{S}.\overrightarrow{AO}=\frac{S_2}{S}.\overrightarrow{AB}+\frac{S_3}{S}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO}=\frac{S_2}{S}.\overrightarrow{AB}+\frac{S_3}{S}.\overrightarrow{AC} \quad (1').$$

Để chứng minh (1), ta chỉ cần chứng minh (1'). Thật vậy, dựng hình bình hành AMON nhận AO làm đường chéo như hình vẽ, theo quy tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=x.\overrightarrow{AB}+y.\overrightarrow{AC}$ (trong đó: $x=\frac{AM}{AB}>0$, $y=\frac{AN}{AC}>0$). Để chứng minh (1') ta cần chứng minh $x=\frac{S_2}{S}$, $y=\frac{S_3}{S}$. Ta có: $x=\frac{AM}{AB}=\frac{ON}{AB}=\frac{KO}{KB}=\frac{OO_1}{BB_1}$ (trong đó O_1, B_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của O, B lên AC).

Mặt khác: $S_2=\frac{1}{2}OO_1.AC$, $S=\frac{1}{2}BB_1.AC \Rightarrow \frac{OO_1}{BB_1}=\frac{S_2}{S}$.

Do đó: $x=\frac{S_2}{S}$, tương tự, ta cũng thu được $y=\frac{S_3}{S}$.



Hình 1

Vậy (1') được chứng minh.

Mở rộng bài toán bằng cách xét các trường hợp đặc biệt của điểm O:

1) Trường hợp O nằm trong tam giác ABC:

- Trường hợp O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác: Thay $S_1=a.r_a$, $S_2=b.r_b$, $S_3=c.r_c$ và chú ý $r_a=r_b=r_c$, ta có bài toán quen thuộc sau:

Bài toán 1a: Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Thật vậy: $S_1.\overrightarrow{OA}+S_2.\overrightarrow{OB}+S_3.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow a.r_a.\overrightarrow{OA}+b.r_b.\overrightarrow{OB}+c.r_c.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

*** Khoa Sư phạm, Trường Đại học Tây Nguyên**

**** Cao học khóa 19, Trường Đại học sư phạm Hà Nội**

$\Leftrightarrow a.\overrightarrow{OA}+b.\overrightarrow{OB}+c.\overrightarrow{OC}=\vec{O}$. Từ đó, nếu thay tiếp $a=2R.\sin A; b=2R.\sin B; c=2R.\sin C$ ta có ngay bài toán sau:

Bài toán 1b: Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin A.\overrightarrow{OA}+\sin B.\overrightarrow{OB}+\sin C.\overrightarrow{OC}=\vec{O}$

- Trường hợp O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: Trong *bài toán 1*, thay $S_1=\frac{1}{2}.R^2.\sin 2A$, $S_2=\frac{1}{2}.R^2.\sin 2B, S_3=\frac{1}{2}.R^2.\sin 2C$, ta có bài toán sau:

Bài toán 1c: Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin 2A.\overrightarrow{OA}+\sin 2B.\overrightarrow{OB}+\sin 2C.\overrightarrow{OC}=\vec{O}$

- Trường hợp O là điểm Toricelli trong tam giác ABC: Ta có bài toán sau:

Bài toán 1d: Giả sử O là điểm nằm trong tam giác ABC thỏa mãn $\angle AOC=\angle BOC=\angle AOB=120^0$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{OA}.\overrightarrow{OA}+\frac{1}{OB}.\overrightarrow{OB}+\frac{1}{OC}.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Thật vậy: Ta có: $S_1=\frac{1}{2}OB.OC.\sin 120^o$, $S_2=\frac{1}{2}OA.OC.\sin 120^o$, $S_3=\frac{1}{2}OA.OB.\sin 120^o$

Do đó: $\frac{S_2}{S_3}=\frac{OC}{OB}\Rightarrow\frac{1}{OB}=\frac{S_2}{OC.S_3}$, $\frac{S_1}{S_3}=\frac{OC}{OA}\Rightarrow\frac{1}{OA}=\frac{S_1}{OC.S_3}$.

Vậy $\frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{OB}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{OC}\overrightarrow{OC}=\vec{0}\Leftrightarrow\frac{S_1}{OC.S_3}\overrightarrow{OA}+\frac{S_2}{OC.S_3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{OC}\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow S_1.\overrightarrow{OA}+S_2.\overrightarrow{OB}+S_3.\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

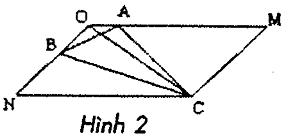
Đẳng thức cuối đã được chứng minh hay đẳng thức 1d) được chứng minh.

2) Trường hợp O nằm ngoài tam giác ABC: Ở đây chúng ta chỉ xét trường hợp O nằm trong miền góc ACB, các trường hợp khác phát biểu và chứng minh tương tự. Cần lưu ý, trong *bài toán 1* ta luôn có $S=S_1+S_2+S_3=S$, còn trong trường hợp O nằm trong miền góc ACB, HS dễ dàng thấy được: $S_1+S_2-S_3=S$, điều này giúp GV đưa ra bài toán sau cho HS:

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. Gọi O là điểm nằm ngoài tam giác và nằm trong miền góc ACB, S_1, S_2, S_3, S lần lượt là diện tích của các tam giác OBC, OAC, OAB, ABC. Chứng minh rằng: $S_1.\overrightarrow{OA}+S_2.\overrightarrow{OB}-S_3.\overrightarrow{OC}=\vec{O}$ (2).

Thật vậy: Ta có: $(2)\Leftrightarrow S_3.\overrightarrow{OC}=S_1.\overrightarrow{OA}+S_2.\overrightarrow{OB}$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=\frac{S_1}{S_3}.\overrightarrow{OA}+\frac{S_2}{S_3}.\overrightarrow{OB}$ (2').

Để chứng minh (2) ta chỉ cần chứng minh (2').



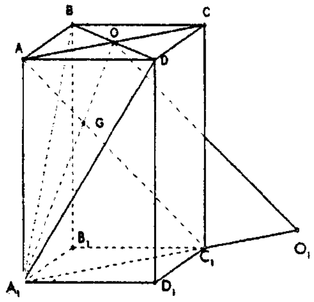
Hình 2

Dựng hình bình hành OMCN nhận OC làm đường chéo như *hình 2*. Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=x.\overrightarrow{OA}+y.\overrightarrow{OB}$. Trong đó: $x=\frac{OM}{OA}>0$, $y=\frac{ON}{OB}>0$. Để chứng minh (2'), cần chứng minh $x=\frac{S_1}{S_3}$, $y=\frac{S_2}{S_3}$. Ta có: $x=\frac{OM}{OA}=\frac{S_{\Delta OBM}}{S_{\Delta BOA}}=\frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta BOA}}=\frac{S_1}{S_3}$.

Tương tự, ta chứng minh được $y=\frac{S_2}{S_3}$. Vậy (2') được chứng minh.

2) Tập luyện cho HS chuyển việc tìm tòi lời giải bài toán hình không gian về bài toán hình học phẳng một cách mềm dẻo. Ta xét bài toán sau:

Bài toán 3: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi G là trọng tâm của tam giác A_1BD. Chứng minh rằng: A,G,C_1 thẳng hàng (*hình 3*).



Hình 3

Chứng minh: Ta có: AA_1C_1C là hình bình hành nên $A_1C_1//AO$. Gọi O_1 là điểm trên A_1C_1 kéo dài về phía C_1 sao cho $C_1O_1=AO$. Khi đó: AC_1O_1O là hình bình hành (vì $C_1O_1=AO$ và $C_1O_1//AO$) nên $AC_1//OO_1$. Xét phép chiếu song song theo phương AC_1 lên mặt phẳng $(A_1B_1C_1D_1)$, ta có: $O\mapsto O_1$, $A_1\mapsto A_1$ $\Rightarrow A_1O\mapsto A_1O_1$.

Vì G là trọng tâm của tam giác A_1BD nên $GA_1=2.GO$. Do đó: $G\in A_1O\Rightarrow G_1\in A_1O_1$ sao cho $G_1A_1=2G_1O_1$.

Để chứng minh A,G,C_1 thẳng hàng, ta chuyển về bài toán trong hình học phẳng: Xét trong mặt phẳng (ACC_1A_1), chứng minh $G_1\equiv C_1$ tương đương với cần chứng minh $C_1A_1=2C_1O_1$. Thật vậy: $C_1O_1=AO=\frac{1}{2}.AC=\frac{1}{2}.A_1C_1\Rightarrow C_1O_1=\frac{1}{2}.A_1C_1$, suy ra $G_1\equiv C_1$. Vậy A,G,C_1 thẳng hàng.

3) Tập luyện cho HS biết chuyển việc giải một bài toán hình học về bài toán đại số một cách phù hợp. Xét bài toán sau:

Bài toán 4: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên các các trục Ox, Oy sao cho $OM + OM = 1$ (*hình 4*). Tìm tập hợp điểm I thuộc MN sao cho $\frac{IM}{IN}=k$ (k là số thực dương cho trước).

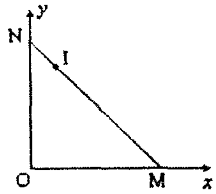
Giải: Giả sử M(*m*;0), N(0;1-*m*), I(x;y), *x,y* ≥ 0, 0 ≤ m ≤ 1.

$\overrightarrow{IM}=(m-x;-y),\overrightarrow{IN}=(-x;1-m-y)\Rightarrow -k\times\overrightarrow{IN}=(kx;-k(1-m-y))$.

Vì $\frac{IM}{IN}=k$, $\overrightarrow{IM}$ và $\overrightarrow{IN}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{IM}=-k\times\overrightarrow{IN}$

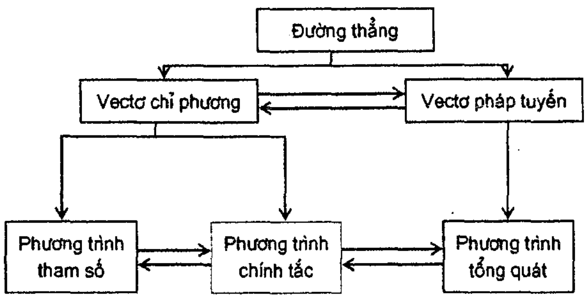
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-x=kx\\-y=-k(1-m-y)\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}m=kx+x\\(k+1)y=-km+k\end{cases}$$

Thay $m = kx + x$ vào phương trình $(k+1)y = -km+k$, ta có: $(k+1)y = -k(kx+x) + k$ $\Leftrightarrow (k+1)y = -k(k+1)x + k$ $\Leftrightarrow y=-kx+\frac{k}{k+1}$. Tập hợp điểm I cần tìm là một phần đường thẳng có phương trình $y=-kx+\frac{k}{k+1}$, nằm trong miền góc *xOy*.



Hình 4

2. Tập luyện cho HS hệ thống hóa kiến thức đã học, từ đó, hoàn thiện tri thức phương pháp khi giải toán. Biện pháp này giúp HS có cách nhìn tổng thể về kiến thức trong chương trình, thấy được mối liên hệ giữa các phần đã học, từ đó HS sẽ nắm vững kiến thức trong SGK và phương pháp giải các bài tập toán, góp phần rèn luyện TDST cho các em. Để minh họa cho biện pháp này, ta xét *ví dụ*: Sau khi dạy xong bài: *«Phương trình đường thẳng"* (Hình học 10), GV có thể hướng dẫn HS hệ thống hóa kiến thức thông qua sơ đồ:



3. Tập luyện cho HS giải quyết vấn đề đặt ra bằng nhiều cách khác nhau một cách nhuần nhuyễn, từ đó lựa chọn cách tối ưu để thực hiện. Ta biết rằng *tính nhuần nhuyễn* của TDST được đặc trưng bởi khả năng tạo ra một số lượng các ý tưởng nhất định. Số ý tưởng càng nhiều thì khả năng xuất hiện các ý tưởng độc đáo càng lớn. Tính nhuần nhuyễn còn thể hiện rõ nét ở hai đặc trưng: *Tính đa dạng* của cách xử lí khi giải toán và *xem xét đối tượng dưới nhiều khía cạnh khác nhau*. Chẳng hạn, ta xét bài toán sau:

Bài toán 5: Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d:\ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-6}{3}\ \text{và}\ d':\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3-t\end{cases}.$$

Viết phương trình tham số (Δ) đường vuông góc chung của *d* và *d'*.

Ta thấy, đường thẳng *d* đi qua A(0; 1; 6) và nhận vectơ $\vec{a}(1;2;3)$ làm vectơ chỉ phương. Đường thẳng *d'* đi qua B(1; -2; 3) và nhận vectơ $\vec{b}(1;1;-1)$ làm vectơ chỉ phương. Gọi $\vec{c}$ là vectơ chỉ phương của đường vuông góc chung (Δ) thì $\vec{c}\perp\vec{a}$ và $\vec{c}\perp\vec{b}$. Do đó: $\vec{c}=[\vec{a},\vec{b}]$ = (- 5; 4; -1). Với bài toán này, GV nên hướng dẫn HS giải theo 4 cách như sau:

Cách 1: Lập phương trình mặt phẳng (P) qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=[\vec{c},\vec{a}]=(14;14;-14)$. Phương trình của mặt phẳng (P) là: $x + y - z + 5 = 0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua B và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q}=[\vec{c},\vec{b}]=(-3;-6;-9)$.

Phương trình mặt phẳng (Q) là: x+2y+3z-6 = 0. Đường thẳng (Δ) = (P) ∩ (Q). Từ đó suy ra phương trình tham số của (Δ) là $\begin{cases}x=-16+5t\\y=11-4t\\z=t\end{cases}$.

Cách 2: Lập phương trình (P) (như *cách 1*): x + y - z + 5 = 0. Tọa độ giao điểm C của d' và (P) là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-2+t\\z=3-t\\x+y-z+5=0\end{cases}.$$ Giải hệ, ta được:

$$x=\frac{2}{3},y=-\frac{7}{3},z=\frac{10}{3},t=-\frac{1}{3}\Rightarrow C\left(\frac{2}{3};-\frac{7}{3};\frac{10}{3}\right).$$

Đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua điểm C, nhận $\vec{c}$ là vectơ chỉ phương có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - 5t \\ y = -\frac{7}{3} + 4t. \\ z = \frac{10}{3} - t \end{cases}$

Cách 3: Lập phương trình mặt phẳng (Q) như cách 1: (Q): x + 2y + 3z - 6 = 0. Chuyển phương trình của đường thẳng *d* về phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 6 + 3t. \end{cases}$$

Gọi $D = d \cap (Q) \Rightarrow D(-1;-1;3)$. Đường thẳng (Δ) cần tìm đi qua D và nhận $\vec{c}$ làm vectơ chỉ phương với phương trình tham số là: $\begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -1 + 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

4. Giải các bài tập toán một cách sáng tạo và độc đáo. Tính độc đáo của TDST là tìm ra những hiện tượng, các mối quan hệ, giải pháp mới,... Do đó, việc tìm cách giải hay, độc đáo cho một bài toán là việc làm rất bổ ích và cần thiết với HS.

Bài toán 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng *a*, M là điểm nằm trong tam giác. Gọi MD, ME, MF lần lượt là đường cao kẻ từ M đến cạnh BC, CA, AB. Xác định vị trí của điểm M để $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Cách giải: Gọi *h* là đường cao trong tam giác ABC, HS dễ dàng tính được $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Đặt MD = x, ME = y, MF = z. Ta có: $S_{ABC} = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}a.h = \frac{1}{2}a.x + \frac{1}{2}b.y + \frac{1}{2}c.z$ $\Leftrightarrow h = x + y + z$ (vì a = b = c).

Như vậy, bài toán hình học trở thành bài toán đại số thường gặp sau: *Cho 3 số dương x, y , z thỏa mãn x+y+z = h (h>0, h là hằng số). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9 \Rightarrow h.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9$$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq \frac{9}{h} = \frac{6\sqrt{3}}{a}$ dấu «=" xảy ra khi x = y = z = $\frac{h}{3}$, hay M là tâm của đường trong nội tiếp tam giác ABC. Vậy, khi M là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{6\sqrt{3}}{a}$.

* * *

Trong dạy học toán ở trung học phổ thông, việc rèn luyện TDST đóng vai trò rất quan trọng nhằm phát triển tư duy cho HS; nếu GV thường xuyên bồi dưỡng TDST cho các em thì hiệu quả dạy học sẽ được sẽ được nâng cao. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Alêxêep M - Onhisuc V - Crugliăc M - Zabôtin V - Vecxcle X. **Phát triển tư duy học sinh.** NXB *Giáo dục*, H.1976.
2. Hoàng Chúng. **Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông.** NXB *Giáo dục*, H.1969.
3. Tôn Thân. *Xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo cho học sinh khá giỏi ở trường trung học cơ sở Việt Nam.* Luận án phó Tiến sĩ, Viện khoa học giáo dục, 1995.
4. Đức Uy. **Tâm lí học sáng tạo.** NXB *Giáo dục*, H.1999.
5. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên). **Hình học 10.** NXB *Giáo dục Việt Nam*, H. 2010.

SUMMARY

In the process of teaching and learning mathematics, creative thinking of learners is shown in determining the requirements of the problem, making hypotheses, criticizing and evaluating hypotheses, choosing the solution, modifying to improve the solution,... Creative thinking capacity is the core competence of the learners, thus, fostering creative thinking for students in teaching mathematics is essential.