SÁNG TẠO BÀI TOÁN MỚI TỪ BÀI TOÁN BAN ĐẦU VỀ BẤT ĐẲNG THỨC NHẰM RÈN LUYỆN TƯ DUY ĐỘC LẬP, SÁNG TẠO CHO HỌC SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

ThS. NGUYỄN SƠN HÀ*

Rèn luyện tư duy độc lập và sáng tạo cho học sinh (HS) là một trong những nhiệm vụ quan trọng trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông. Phần lớn những bài toán (BT) ở phổ thông hiện nay là BT có kết luận rõ ràng, yêu cầu chứng minh một kết quả nào đó hoặc tìm một đối tượng cụ thể; từ những BT đó, giáo viên (GV) có thể thay đổi cách phát biểu để đưa ra BT mới. Bất đẳng thức (BĐT) là một dạng toán tiềm tàng nhiều khả năng phát triển tư duy cho người học. Bài báo trình bày một số cách sáng tạo BT mới thông qua BT ban đầu về BĐT nhằm rèn luyện tư duy độc lập, sáng tạo cho HS ở trung học phổ thông.

1. GV giấu đi phép toán của BĐT, yêu cầu HS so sánh giá trị của các biểu thức, sau đó HS tự thay đổi điều kiện của BT để tìm ra kết quả mới

BT ban đầu: Cho A, B là các biểu thức chứa biến. Chứng minh BĐT $A \geq B$.

Trong BT ban đầu này, biểu thức cần chứng minh đã được phát biểu một cách tường minh. GV giấu đi phép toán của BĐT để HS phải phán đoán, phát hiện kết quả cần chứng minh. GV yêu cầu HS chủ động thay đổi điều kiện của BT để tìm ra kết quả mới. Vì vậy, HS có thể phát biểu lại BT như sau:

BT mới: Cho A, B là các biểu thức chứa biến. So sánh giá trị của hai biểu thức A, B. Nếu thay đổi điều kiện của biến thì kết quả thay đổi như thế nào?

Ví dụ 1: *BT ban đầu:* Chứng minh rằng: $x^3 + 2x > 3x^2, \forall x > 2$.

BT mới: Cho $x > 2$

a) So sánh giá trị của hai biểu thức $A = x^3 + 2x$ và $B = 3x^2$.

b) Nếu thay đổi điều kiện đối với x thì kết quả thay đổi như thế nào?

Phân tích: $A - B = x^3 + 2x - 3x^2 = x(x^2 - 3x+2) = x(x-1)(x-2)$

a) Vì $x > 2$ nên $x(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow A-B > 0 \Rightarrow A>B$.

b) Xét dấu của biểu thức $x(x-1(x-2)$:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-1$		−	|	−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	|	−	0	+	
$x(x-1)(x-2)$		−	0	+	0	−	0	+	

Ta có: với $x \in \{0;1;2\}$ thì $A-B > 0 \Rightarrow A=B$; với $x \in (-\infty;0) \cup (1;2)$ thì $A-B < 0 \Rightarrow A<B$; với $x \in (0;1) \cup (2;+\infty)$ thì $A-B > 0 \Rightarrow A>B$.

Nhận xét: Trong quá trình xét dấu của biểu thức A - B, HS có thể tự đề xuất các điều kiện khác đối x với và đưa ra kết quả mới.

Ví dụ 2: *BT ban đầu:* Chứng minh rằng: $ab+1 > a+b$, *với* $\forall a,b > 1$.

BT mới: Cho các số thực $a, b > 1$.

a) So sánh hai biểu thức $M = ab + 1$ và $N = a+b$.

b) Nếu thay đổi điều kiện đối với các số a, b, kết quả thay đổi như thế nào?

Phân tích: $ab+1-a-b = (a-1)(b-1)$.

a) Nếu $a>1$; $b>1$ thì $a-1>0$, $b-1>0 \Rightarrow (a-1)(b-1) > 0 \Rightarrow ab+1 > a+b$.

b) Ta xét các trường hợp sau: - Nếu một trong hai số a, b bằng 1 thì $(a-1)(b-1) = 0 \Rightarrow ab+1 = a+b$; - Nếu cả hai số a, b nhỏ hơn 1 thì: $a-1 < 0$; $b-1 < 0 \Rightarrow (a-1)(b-1) > 0 \Rightarrow ab+1 > a+b$; - Nếu hai số a, b có đúng một số lớn hơn 1 và một số nhỏ hơn 1 thì $(a-1)(b-1) < 0 \Rightarrow ab+1 < a+b$.

Nhận xét: Trong quá trình xét dấu của biểu thức $A - B$, HS có thể tự đề xuất các điều kiện khác đối với hai số a, b và đưa ra kết quả mới.

Ví dụ 3: *BT ban đầu:* Cho $n \in N^*$, $x \in R$, $f(x) = 2x^n + 1$, $g(x) = x^n + 2$. Chứng minh rằng: $f(x) > g(x)$, $\forall x > 1$.

BT mới: Cho $n \in N^*$, $x \in R$.

* Trường THPT Chuyên Đại học sư phạm Hà Nội

a) So sánh giá trị của hai biểu thức $f(x) = 2x^n + 1$ và $g(x) = x^n + 2$ khi $x > 1$.

b) Nếu thay đổi điều kiện của BT đối với *x* và *n* thì kết quả thay đổi như thế nào?

Phân tích: a) $f(x) - g(x) = x^n - 1$. Với $\forall x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \Rightarrow f(x) > g(x)$;

b) * Nếu $x = 1$ thì $x^n = 1 \Rightarrow x^n - 1 = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$;

* Nếu $x < 1$, xét các trường hợp sau của n:

Trường hợp 1: *n* là số nguyên dương lẻ, $x<1 \Rightarrow x^n<1 \Rightarrow x^n-1 < 0 \Rightarrow f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

Trường hợp 2: *n* là số nguyên dương chẵn, $x^n - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$x^n - 1$	+	0	−	0	+	

Bảng trên cho thấy: + Với x = -1; n chẵn: $f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$; + Với $x < -1$; *n* chẵn: $f(x) - g(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$; + Với $-1 < x < 0$; *n* chẵn: $f(x) - g(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

Kết luận: - Nếu n lẻ: + $f(x) = g(x)$ khi $x = 1$; + $f(x) > g(x)$ khi $x > 1$; + $f(x) < g(x)$ *khi* $x < 1$; - Nếu n chẵn: + $f(x) = g(x)$ *khi* $x \in \{-1;1\}$; + $f(x) > g(x)$ *khi* $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$; + $f(x) < g(x)$ *khi* $x \in (-1;1)$.

HS đã sử dụng tính chẵn lẻ của n, kết hợp với các khoảng của biến để so sánh giá trị hai biểu thức. Việc xét các trường hợp cụ thể của n và x không có trong yêu cầu của bài toán; tuy nhiên, với câu hỏi 'mở', HS phải tự tìm ra các điều kiện liên quan của n và x. Mặt khác, HS có thể khám phá ra BĐT $f(x) > g(x)$ không chỉ đúng khi $x > 1$ mà còn đúng khi $x < -1$ trong trường hợp n là số chẵn.

2. Chuyển từ chứng minh một BĐT sang chứng minh nhiều BĐT có thể có

BT ban đầu: Chứng minh BĐT $A \geq B$.

BT mới: Cho các biểu thức *A, B*, $C_m = B + m(A-B)$, $C_n = B + n(A-B)$. Hãy lập tất cả các BĐT có thể có giữa các biểu thức A, B, C_m, C_n và chứng minh các BĐT đó.

Phân tích: $A - C_m = A - B - m(A-B) = (1-m)(A-B)$, $B-C_m = -m(A-B)$, $C_m-C_n = (m-n)(A-B)$... Việc lập các BĐT mới được dựa vào kết quả xét dấu của biểu thức *A-B*. Như vậy, từ BĐT $A \geq B$, GV có thể yêu cầu HS tìm mối liên hệ giữa các biểu thức. Với mỗi số thực m khác 0 tương ứng sẽ có một biểu thức C_m để yêu cầu HS so sánh với các biểu thức *A, B*; tương ứng với hai số thực phân biệt *m, n* khác 0, GV có thể yêu cầu HS so sánh giữa C_m và C_n. Cách phát biểu của BT mới giúp người học rèn luyện tư duy độc lập, sáng tạo nhiều hơn so với việc chứng minh BĐT ban đầu.

Ví dụ 4: *BT ban đầu:* Cho $x, y \in R$, $A = x^2+y^2$, $B = 2xy$. Chứng minh rằng: $A \geq B$.

BT mới: Cho $x, y \in R$, $A = x^2 + y^2$, $B = 2xy$, $C = \frac{(x+y)^2}{2}$, $D = \frac{(x+3y)^2+(y+3x)^2}{16}$.

Hãy lập các BĐT có thể có giữa các biểu thức A, B, C, D và chứng minh các BĐT đó.

Phân tích: $A - B = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq B$

$$A - C = x^2 + y^2 - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{1}{2}(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq C$$

$$A - D = x^2 + y^2 - \frac{(x+3y)^2+(y+3x)^2}{16} = \frac{3}{8}(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow A \geq D$$

$$B - C = 2xy - \frac{(x+y)^2}{2} = \frac{-1}{2}(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow B \leq C$$

$$B - D = 2xy - \frac{(x+3y)^2+(y+3x)^2}{16} = \frac{-5}{8}(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow B \leq D$$

$$C - D = \frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+3y)^2+(y+3x)^2}{16} = \frac{-1}{8}(x-y)^2 \leq 0 \Rightarrow C \leq D$$

Ở BT ban đầu, GV đã rèn luyện cho HS kĩ năng vận dụng kết quả $(x-y)^2 \geq 0$ để chứng minh BĐT. Tuy nhiên, với BT mới, GV đưa HS vào tình huống tự kiến tạo ra các BĐT; trong đó, HS phải vận dụng một cách nhuần nhuyễn kết quả $(x-y)^2 \geq 0$ vào chứng minh các BĐT khác.

Ví dụ 5: BT ban đầu: Cho $x \in (1;2)$, $A = x^2 + 2$, $B = 3x$. Chứng minh rằng: $A < B$.

BT mới: Cho $x \in (1;2)$, $A = x^2 + 2$, $B = 3x$, $C = 5x^2 - 12x + 10$, $D = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - \frac{4}{5}$.

Hãy lập tất cả các BĐT có thể có giữa các biểu thức *A, B, C, D*. Chứng minh các BĐT đó.

Phân tích: $A - B = x^2 + 2 - 3x = (x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow A < B$

$$A - C = x^2 + 2 - (5x^2 - 12x + 10) = -4(x^2 - 3x + 2) = -4(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow A > C$$

$$A - D = x^2 + 2 - (-\frac{2}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - \frac{4}{5}) = \frac{7}{5}x^2 - \frac{21}{5}x + \frac{14}{5} = \frac{7}{5}(x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow A < D.$$

$$B - C = 3x - (5x^2 - 12x + 10) = -5(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow B > C$$

$$B - D = 3x - (-\frac{2}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - \frac{4}{5}) = \frac{2}{5}x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}(x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow B < D$$

$$C - D = 5x^2 - 12x + 10 - (-\frac{2}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - \frac{4}{5}) = \frac{27}{5}(x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow C < D$$

Khi HS giải BT ban đầu, GV chỉ kiểm tra được ở HS kĩ năng vận dụng BĐT $(x-1)(x-2) < 0$ (điều kiện $1<x<2$) để chứng minh BT. Tuy nhiên, với BT mới, GV đưa HS vào tình huống tự lập ra và chứng minh các BĐT mới, trong đó, HS phải vận dụng một cách nhuần nhuyễn kết quả $(x-1)(x-2) < 0$ (với điều kiện $1<x<2$).

3. Từ BT ban đầu, HS có thể đưa ra nhiều BT mới và *"cần phải dự đoán kết quả hoặc một phần nào đó của kết quả, tự mình khám phá kiến thức trong khả năng có thể, tự khám phá tới mức tối đa trong những hoành cảnh cụ thể"* (1); những BT như vậy được gọi là BT mở. Một số đặc điểm của BT mở ở trường phổ thông: *- BT tìm tòi thì điều phải tìm không được nêu lên một cách tường minh, người học phải tìm tất cả các kết quả có thể có; - Nếu là BT chứng minh, người học phải phán đoán, phát hiện các kết quả cần chứng minh và chứng minh điều đó; - Người học có thể thay đổi một số điều kiện để đưa ra kết quả mới.*

Với BT mở, HS không bị phụ thuộc vào kiến thức đã có mà được tham gia vào quá trình sáng tạo BT mới, các em có thể tự giải quyết vấn đề và thu được những kết quả mới từ điều kiện quen thuộc. Qua đó, HS rèn luyện được tính mềm dẻo của tư duy sáng tạo, khả năng áp dụng linh hoạt kết quả đã có vào giải quyết các BT khác nhau, đặc biệt là các em rèn luyện được tính nhuần nhuyễn, một tính chất quan trọng của tư duy sáng tạo. ❑

---

(1) G. Polya. **Sáng tạo toán học**, tập 3. NXB *Giáo dục*, H. 1976.

Tài liệu tham khảo

1. Tôn Thân. *Xây dựng hệ thống câu hỏi bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của tư duy sáng tạo cho học sinh khá và giỏi Toán ở trường trung học cơ sở Việt Nam.* Luận án Phó tiến sĩ Khoa học tâm lí. Viện khoa học giáo dục, H. 1995.

SUMMARY

The article summarizes some characteristics of the open problems in schools and offers some creative measures to open the problem of inequality contents. These measures will help teachers from the inequality has to create problems on the ability to promote independent and creative students.

Thực trạng sử dụng kĩ thuật...

(Tiếp theo trang 14)

Để khẳng định vai trò của PPDH và KTDH đối với môn GDH, chúng tôi phỏng vấn một số GV. Ý kiến được cô V.T.L.A nêu ra là «trong xã hội ngày nay con đường để cho người học chiếm lĩnh tri thức nhanh nhất là con đường tự học. Mà để kích thích được hứng thú nhận thức của các em không có con đường nào khác đó chính là việc «nên" và «cần phải" sử dụng các PPDH và KTDH".

3. Qua thực tế nghiên cứu, chúng tôi nhận thấy, GV đã rất nỗ lực đưa PPDH và KTDH hiện đại vào trong bài giảng của mình. Tuy nhiên, số lượng này không cao và việc sử dụng này còn mang tính chất phong trào chưa đúng với quy trình cách thức tiến hành thực hiện. Một số GV chưa thực sự tâm huyết khi khi lên lớp. Có nhiều nguyên nhân ảnh hưởng đến việc GV vận dụng PPDH và KTDH vào môn GDH, nguyên nhân cả về phía chủ quan lẫn khách quan: năng lực tổ chức: 35,7% GV chọn «đúng", thời gian: 71,4% chọn «đúng", SV chưa thích ứng với sự thay đổi PP học tập: 78,6% số GV chọn.

Để nâng cao chất lượng và hiệu quả DH môn GDH, GV cần phải vững về chuyên môn, chắc về PPDH và KTDH và thường xuyên học hỏi không ngừng có thể đáp ứng được những yêu cầu, đòi hỏi của xã hội. ❑

---

(1) Trần Ngọc Lan - Đặng Hồng Hiếu. "Kĩ thuật dạy học - Một cấp độ của phương pháp dạy học". *Tạp chí Giáo dục*, số 205 (Kì 1, 1/2009).

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Cường. **Phương tiện kĩ thuật và đồ dùng dạy học (Chương trình giáo dục đại học).** Bộ GD-ĐT, H 1995.
2. Dự án Việt - Bỉ. *Tài liệu tập huấn dạy và học tích cực*, H 2001.
3. Nguyễn Kỳ. **Phương pháp giáo dục tích cực lấy người học làm trung tâm**. NXB *Giáo dục*, H 1995.
4. Lê Nguyên Long. **Thử đi tìm những phương pháp dạy học hiệu quả**. NXB *Giáo dục*, H 2000.
5. Trần Hồng Quân. "Phương pháp dạy học tích cực, một phương pháp vô cùng quý báu". Tạp chí *Nghiên cứu giáo dục*, 12/1994.

SUMMARY

Through the invertigation process the situattion, we realized that: teachers have access to the modern methods and techniques of teaching but not high.