

# BỒI DƯỠNG TƯ DUY THUẬN NGHỊCH CHO HỌC SINH TRONG DẠY HỌC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

○ ThS. THÁI THỊ HỒNG LAM\*

**K**hái niệm là một hình thức tư duy phản ánh một lớp đối tượng. Nếu xem tư duy của con người như một cơ thể sống thì khái niệm sẽ là các đơn vị nhỏ - tế bào để cấu thành cơ thể tư duy đó. Do đó, học tốt các khái niệm toán học chính là điều kiện cơ bản để bảo đảm tư duy toán học chính xác.

Trong dạy học toán ở trường phổ thông, một trong những điều quan trọng nhất là hình thành cho học sinh (HS) một hệ thống khái niệm. Khi gặp các định nghĩa được phát biểu theo hướng: «Nếu A thì B» HS thường hiểu và vận dụng tốt chiều «Nếu A thì B», mà ít khi suy nghĩ tới chiều ngược lại «Nếu B thì A». Bên cạnh đó, HS thường khó diễn đạt một khái niệm theo nhiều cách khác nhau cũng như tìm một định nghĩa tương đương với nó; từ đó, các em gặp khó khăn trong việc giải quyết vấn đề. Dưới đây, chúng tôi đề xuất một số biện pháp giúp HS hiểu và vận dụng một cách vững chắc các khái niệm toán học, đồng thời bồi dưỡng tư duy thuận nghịch cho các em.

**1. Giúp HS hiểu rõ tính có thể đảo ngược của một khái niệm và biết vận dụng định nghĩa khái niệm theo hai chiều**

*Định nghĩa khái niệm là một thao tác logic dùng để tách sự vật cần định nghĩa từ những sự vật tiếp cận với nó, sao cho trong phạm vi của định nghĩa phải chỉ ra được những thuộc tính cơ bản chung tạo nên nội hàm của khái niệm. Nhờ các thuộc tính này, có thể tách ra được tất cả các đối tượng có các thuộc tính đó và chỉ những đối tượng đó được hợp nhất vào một thể thống nhất nhờ khái niệm đã cho (1; tr. 115).*

Ta thường gặp các định nghĩa, phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau như:

«.....nếu (khi).....»; «.....gọi là (được gọi là).....»; «.....là.....».

Ví dụ: 1) Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ ; 2) Tam giác có hai cạnh bằng nhau gọi là tam giác cân; 3) Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường

thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Để thực hiện được biện pháp trên, trong quá trình dạy học khái niệm, giáo viên (GV) cần: - Thông qua các ví dụ về khái niệm, giải thích cho HS hiểu rằng, dù được phát biểu ở dạng nào, *định nghĩa luôn là một điều kiện cần và đủ*. Nếu trong dạy học định lí, GV thường xuyên phải lưu ý cho HS không nhầm lẫn giữa điều kiện cần với điều kiện đủ thì khi dạy học khái niệm, GV cần giúp HS hiểu được các cách phát biểu định nghĩa có cấu trúc logic theo điều kiện cần và đủ. Nói cách khác, *tất cả các định nghĩa đều có thể đảo ngược được*. Vì vậy, GV có thể yêu cầu *phát biểu định nghĩa khái niệm theo cả hai chiều xuôi và ngược* nhằm rèn luyện năng lực sử dụng chính xác ngôn ngữ toán học cho HS, giúp các em nắm vững các dấu hiệu đặc trưng của khái niệm; - Giúp HS hiểu *tính có thể đảo ngược* của định nghĩa là một đặc tính có vai trò rất quan trọng. Thứ nhất là dùng định nghĩa để có thể phán đoán một sự vật nào đó có thuộc khái niệm này hay không (nhận dạng khái niệm). Thứ hai là mệnh đề ngược của định nghĩa có nêu rõ tính chất của một danh từ hoặc thuật ngữ nào đó mà nó có. Vì vậy, GV cần quan tâm đồng thời các tình huống, các bài toán, hướng dẫn HS vận dụng định nghĩa, từ đó, các em mới có thể vận dụng linh hoạt các định nghĩa toán học vào quá trình giải quyết vấn đề.

Ví dụ 1: Với khái niệm đồ thị của hàm số, GV yêu cầu HS giải quyết hai vấn đề, đó là: - Kiểm tra các điểm có thuộc đồ thị của hàm số hay không; - Tìm các đại lượng trong hàm số của đồ thị.

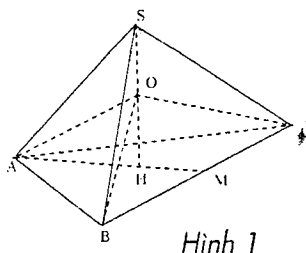
Ví dụ 2: Hình chóp là đều khi và chỉ khi hình chóp có đáy là đa giác đều và chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy (Hình học 11).

Có thể vận dụng hai chiều của định nghĩa để giải bài toán sau:

\* Khoa Toán, Trường Đại học Vinh

*Bài toán:* Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a. SH là đường cao của hình chóp,  $SH = a\sqrt{6}$ . O là trung điểm của SH. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp O.ABC (hình 1).

*Nhận xét:* Từ giả thiết S.ABC là hình chóp đều, ta có ABC là tam giác đều và H là tâm của  $\Delta ABC$  (định nghĩa thuận). Khi đó, hình chóp O.ABC thỏa mãn mệnh đề ngược, nên O.ABC là hình chóp đều. Từ đó, HS dễ dàng giải được bài toán.



Hình 1

**2. Tập luyện cho HS các hoạt động khái quát hóa và đặc biệt hóa trong quá trình dạy học hình thành khái niệm, từ đó, giúp HS lĩnh hội tri thức một cách có hệ thống**

*Khái quát hóa* là chuyển từ một tập hợp đối tượng sang một tập hợp lớn hơn chứa tập hợp ban đầu bằng cách nêu bật một số đặc điểm chung của các phần tử trong tập xuất phát (tức là đi từ cái riêng đến cái chung). *Đặc biệt hóa* là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng sang nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho (tức là đi từ cái chung đến cái riêng). Thông thường, chúng ta thực hiện đặc biệt hóa khi chuyển từ một lớp đối tượng đến một đối tượng của lớp đó. Đây là *hai hoạt động trái ngược* nhưng tương hỗ với nhau. Khái niệm về một đối tượng nào đó xuất hiện trong ý thức của con người thường theo cách sau: Từ những đối tượng riêng lẻ (cái riêng), bằng các hoạt động phân tích, so sánh, tổng hợp, trừu tượng hóa và khái quát hóa, tính chất chung của các đối tượng tách ra và được xem là dấu hiệu đặc trưng của một khái niệm. Các khái niệm dạng này được gọi là khái niệm trừu tượng.

*Ví dụ 3:* Để đi đến định nghĩa khái niệm dãy số, GV có thể bắt đầu từ khái niệm «dãy» vốn quen thuộc trong đời sống hàng ngày. Một dãy gồm nhiều vật xếp thành hàng, chẳng hạn: dãy nhà, dãy bàn, dãy núi,... Trong khái niệm dãy có hai yếu tố: một là những vật cùng loại, hai là thứ tự của các vật ấy. Tương tự, khi áp dụng vào các số, một dãy số bao gồm nhiều số sắp theo thứ tự trước sau. Cách tốt nhất để phân biệt các phần tử của dãy là đánh số chúng. Khi đó, trong

một dãy số, ứng với mỗi số tự nhiên từ 1 trở đi, ta có một số hay một vật hoàn toàn xác định. Đối chiếu với định nghĩa của hàm số cho thấy, một dãy số thực chất là một hàm số xác định trên tập  $\mathbb{N}^*$  hoặc tập hữu hạn M là tập con của  $\mathbb{N}^*$ . Từ đó, HS hình thành khái niệm dãy số.

Khi xây dựng khái niệm dãy số, ta chỉ giữ lại tính chất chung đó là sự tương ứng giữa mỗi số tự nhiên từ 1 trở đi với một số xác định, còn dựa vào các tính chất khác như: quan hệ giữa hai số liên tiếp của dãy như thế nào hoặc các phần tử của dãy có bị chặn hay không ta thu được khái niệm về dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn (trên, dưới), cấp số cộng, cấp số nhân. Từ đó, giúp HS nắm vững một cách có hệ thống khái niệm và mối quan hệ giữa chúng.

**3. Tập luyện cho HS diễn đạt định nghĩa theo các cách khác nhau và tìm định nghĩa tương đương**

Trong một khái niệm toán học, chúng ta thường chọn ra một hoặc một nhóm các tính chất đặc trưng để lấy làm định nghĩa.

*Ví dụ:* Một hình bình hành có các đặc trưng sau: 1) Là một tứ giác có các cặp cạnh đối diện song song; 2) Là một tứ giác có các cặp cạnh đối diện bằng nhau; 3) Là một tứ giác có một cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau; 4) Là một tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Các đặc trưng ở trên đều có thể trở thành định nghĩa của hình bình hành. Thông thường, đặc trưng 1 được chọn làm định nghĩa, khi đó, các đặc trưng khác là định lý được chứng minh tương đương với định nghĩa đã chọn. Cùng một khái niệm, ta có thể *định nghĩa theo nhiều cách tương đương* với nhau, mỗi trường hợp cần lựa chọn dạng nào thích hợp nhất với mục đích mà ta hướng tới.

Chẳng hạn, khái niệm tập giá trị của hàm số có thể định nghĩa bởi các cách sau đây:

*Cách 1:* Cho hàm số  $f: X \rightarrow R; x \mapsto y = f(x)$ , tập giá trị của hàm số f là tập hợp  $Y = \{y = f(x) / x \in X\}$ , hay nói cách khác là tập tất cả các giá trị f(x) với  $\forall x \in X$ .

*Cách 2:* Cho hàm số  $f: X \rightarrow R; x \mapsto y = f(x)$ , tập giá trị của hàm số f là tập hợp tất cả các số, sao cho, với mỗi  $y_0$  thuộc tập đó thì phương trình  $f(x) = y_0$  có ít nhất một nghiệm  $x \in X$ .

Sử dụng cách 2 có nhiều thuận lợi hơn khi giải các bài tập toán. Chẳng hạn, với bài toán:

«Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$ », đối với HS lớp 10, GV có thể sử dụng phương pháp miền giá trị để giải bài toán này. Thật vậy, gọi  $Y$  là tập giá trị của hàm số. Theo định nghĩa, với mỗi  $y_0 \in Y$ , phương trình

$y_0 = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$  luôn có nghiệm. Mặt khác, phương trình này tương đương với  $y_0 x^2 + (y_0 - 2)x + (y_0 - 1) = 0$  (1).

Giải phương trình (1) HS dễ dàng nhận thấy, để phương trình có nghiệm thì  $y_0 = 0$  hoặc

$$\begin{cases} y_0 \neq 0 \\ \Delta = (y_0 - 2)^2 - 4y_0(y_0 - 1) \geq 0; \text{ giải ra ta có } \frac{-2}{\sqrt{3}} \leq y_0 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Vậy, tập giá trị của hàm số là  $\left[ \frac{-2}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}} \right]$ . Từ đây, HS tìm được giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số.

Nếu HS khi giải bài toán trên chỉ căn cứ vào định nghĩa thứ nhất mà không căn cứ vào định nghĩa thứ hai, các em sẽ gặp khó khăn. Do đó, GV nên gọi động cơ kết thúc để nhấn mạnh hiệu quả của việc sử dụng miền giá trị, cũng như lợi ích của việc tìm thêm cách phát biểu khác của khái niệm. Từ đó, trong chương trình Đại số và Giải tích 11, sau khi học phần «Phương trình bậc nhất đối với  $\sin x$  và  $\cos x$ », HS có thể tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số  $f(x)$  mà việc tìm điều kiện của  $y_0$  để phương trình  $f(x) = y_0$  có nghiệm có thể đưa về tìm điều kiện có nghiệm của phương trình  $a \sin x + b \cos x = c$ ; ví dụ như trong bài toán sau: tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a)  $y = 4 \cos x + 3 \sin x + 2$ ;

b)  $y = \frac{3 \cos x + 2 \sin x + 3}{\cos x - \sin x + 4}$ ;

c)  $y = 2 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x + 2$ ;

d)  $y = \frac{\sin^2 2x - 3 \cos^2 2x + 2 \sin 2x \cos 2x}{2 \cos^2 2x + 2}$ .

Một cách để tìm các cách định nghĩa khác của khái niệm là cho HS thiết lập sự tương ứng đa trị giữa khái niệm với các thuộc tính của khái niệm; từ đó, dựa trên sự phân tích các thuộc tính giữ nguyên và thuộc tính có thể thay thế để thiết lập thuộc tính khác tương đương. Ví dụ: khi dạy học khái niệm hình chóp đều ở lớp 11, GV nên cho HS thiết lập sự tương ứng đa trị sau: «Hình chóp đều»

ứng với tập hợp các thuộc tính: «là hình chóp có đáy là đa giác đều, nghĩa là các cạnh bằng nhau và các góc bằng nhau». Để thiết lập thêm các thuộc tính tương đương, GV yêu cầu HS phân tích để xác định các thuộc tính: «hình chóp» và «có đáy là đa giác đều» giữ nguyên còn thuộc tính «các cạnh bên bằng nhau» có thể thay thế bởi các đặc trưng khác tương đương như: «chân đường cao trùng với tâm của đáy» hoặc «các cạnh bên tạo với đáy các góc bằng nhau». Từ đó, khái niệm hình chóp đều ứng với các cách định nghĩa tương đương sau: «là hình chóp có đáy là đa giác đều và đường cao của hình chóp đi qua tâm của đáy» hoặc «là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau»;...

Với cách thiết lập tương ứng như vậy, HS sẽ vận dụng khái niệm hình chóp đều vào giải quyết vấn đề một cách linh hoạt, phù hợp với đặc điểm của bài toán. Chẳng hạn, trong bài toán: "Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Tính độ dài đường cao h theo a" thì đặc trưng của hình chóp đều nên xét đến là "đường cao đi qua tâm của đáy"; còn với bài toán "Cho tứ diện đều ABCD có các cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD" thì đặc trưng của hình chóp đều phù hợp nhất là "các cạnh bên bằng nhau".

Việc khuyến khích HS tìm thêm các định nghĩa khác tương đương với định nghĩa ban đầu giúp các em không chỉ phát triển một số năng lực như: phân tích, tổng hợp, suy luận,... mà còn có thể khắc phục được những khó khăn trong quá trình giải quyết vấn đề. Bởi vậy, trước một khái niệm cụ thể, GV cần khuyến khích HS tìm thêm các định nghĩa tương đương. Khi HS đã tìm được các cách phát biểu mới (tương đương với định nghĩa ban đầu), các em sẽ biết vận dụng vào quá trình giải các bài toán thích hợp.

\*\*\*

Trong dạy học khái niệm toán học ở phổ thông, nếu GV quan tâm tập luyện cho HS khai thác hai chiều của định nghĩa, cách tìm và phát biểu định nghĩa theo các cách khác nhau, các đặc điểm có tính chất ngược nhau sẽ giúp các em phát triển tư duy thuận nghịch, hiểu sâu sắc, đầy đủ và có hệ thống các khái niệm. Từ đó, HS biết vận dụng vững chắc khái niệm toán học trong học tập môn Toán. □

(1) Nguyễn Đức Đồng - Nguyễn Văn Vĩnh. Logic Toán. NXB Thanh Hóa, 2001.

(Xem tiếp trang 55)

sinh đề thi cho thí sinh (TS); - *Làm bài thi*: Sau khi đăng nhập, HS sẽ làm bài thi trên hệ thống thi tự động trực tuyến. HS sẽ đưa ra lựa chọn (một hoặc nhiều) của mình trong quá trình làm bài trong một khoảng thời gian định trước; - *Kết thúc thi*: Khi HS muốn kết thúc thi hoặc hết giờ làm bài, hệ thống sẽ tiến hành kết thúc bài thi của TS đó và đưa ra kết quả chi tiết đến từng phần thi của TS; - *Nhận kết quả thi*: Việc phân loại phụ thuộc vào kết quả thi của TS. Có 5 mức phân loại: Trung bình (50%-60%), Khá tốt (61%-70%), Tốt (71%-80%), Xuất sắc (81%-90%), Nổi bật (91%-100%).

**Quy trình truy cập:** Đăng nhập/Vào thi/Chọn hình thức thi.

Trên hệ thống thi trực tuyến có hai hình thức tham gia thi để kiểm tra, ĐG kết quả học tập môn Toán của HS lớp 12 THPT:

- *HS tự thi*: Để tham gia làm bài thi tự do trên hệ thống, TS chỉ cần kích chọn vào tên bài thi có sẵn trên hệ thống là có thể làm bài thi. Với bài thi thật tự do, TS có thể tham gia thi vào bất cứ thời gian nào. Hình thức thi này rất phù hợp cho HS tự học.

Sau khi kết thúc bài thi, TS có thể xem lại chi tiết bài thi của mình bằng cách chọn chức năng «Báo cáo chi tiết» ở góc trái phía trên giao diện. Trong báo cáo chi tiết này hiển thị những câu trả lời TS, giải thích của đáp án đúng.

- *GV tổ chức thi*: Bài thi có tổ chức do người quản trị tạo và có hạn chế về thời gian tồn tại bài thi, sau thời gian đó bài thi sẽ trở về trạng thái kết thúc và TS không được phép làm bài thi mặc dù đã đăng kí. Để tham gia làm bài thi có tổ chức, TS phải đăng kí thi trước thời gian bài thi bắt đầu. Trong khoảng thời gian bài thi tồn tại (theo quy định của người tạo), TS có thể vào thi bất cứ thời điểm nào. TS chỉ cần chọn đúng bài thi đã đăng kí, hệ thống sẽ hiển thị màn hình sẵn sàng thi và TS bắt đầu làm bài. Các bước làm bài thi thật có tổ chức tương tự như các bước làm bài thi thật tự do ở trên. Sau khi hoàn thành bài thi, thí sinh có thể xem video hướng dẫn giải đề thi bằng cách click chọn vào tab «video hướng dẫn giải».

\*\*\*

Sử dụng hệ thống e-learning toán 12 tổ chức thi trực tuyến để ĐG kết quả học tập môn Toán của HS nhằm hình thành nhận thức đúng đắn của HS về các kì thi đồng thời tạo điều kiện cho HS tự ĐG. Từ đó, hình thành cho HS các kĩ năng: hệ

thống hoá, qua kết quả của kiểm tra và tự kiểm tra đã phân loại các kiến thức về giải tích và hình học lớp 12; phát hiện ra những chỗ thiếu hụt về mặt kiến thức, những sai lầm trong giải toán và đưa ra biện pháp khắc phục; kĩ năng tự rút kinh nghiệm về cách học, phương pháp học tập môn toán cho bản thân và tìm cách điều chỉnh cho chính mình. □

#### Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB Đại học sư phạm, H. 2004.
2. Đào Tam (chủ biên) - Trần Trung. **Tổ chức hoạt động nhận thức trong dạy học môn Toán ở trường trung học phổ thông**. NXB Đại học sư phạm, H. 2010.
3. Trần Trung (chủ biên) - Đặng Xuân Cường - Nguyễn Văn Hồng - Nguyễn Danh Nam. **Ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học môn Toán ở trường phổ thông**. NXB Giáo dục Việt Nam, H. 2011.

#### SUMMARY

*The use of E-learning in teaching and learning to meet the diverse needs of students: study anywhere, study anytime, lifelong learning, learning in an open and flexible way. This paper presents the design and implementation of online test tools used in E-learning system to test and evaluate the learning outcomes in Mathematics of Grade 12 high school students.*

## Bồi dưỡng tư duy thuận nghịch...

(Tiếp theo trang 58)

#### Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Bá Kim (chủ biên). **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB Đại học sư phạm, H. 2004.
2. Thái Thị Hồng Lam. "Một số biểu hiện của tư duy thuận nghịch trong dạy học Toán ở trường phổ thông". *Tạp chí Giáo dục*, số 272 (kì 2, 10/ 2011).
3. Nguyễn Văn Thuận. *Góp phần phát triển năng lực tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ Toán học cho học sinh đầu cấp trung học phổ thông trong dạy học đại số*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học sư phạm Vinh, 2004.
4. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên). **Đại số và giải tích 11**. NXB Giáo dục Việt Nam, H. 2011.

#### SUMMARY

*High school, forming firmly a system of concepts for pupils is very important. This article refers to some measures of teaching concepts in order to help pupils understand and use them firmly, simultaneously contribute to foster reversible thinking for pupils.*