

TẬP LUYỆN CHO HỌC SINH PHÁT TRIỂN NGÔN NGỮ TOÁN HỌC TRONG QUÁ TRÌNH DẠY HỌC TOÁN

○ THS. NGUYỄN HỮU HẬU*

Mỗi môn khoa học đều có một hệ thống thuật ngữ riêng, ngôn ngữ toán học (NNTH) là loại thuật ngữ đã được chuyên môn hoá. Do đó, khi nói về NNTH, một số tác giả quan niệm rằng: *Toán học hiểu theo nghĩa nào đó là một thứ ngôn ngữ (NN) để mô tả những tình huống cụ thể nảy sinh trong nghiên cứu khoa học hoặc trong hoạt động thực tiễn của loài người (1; tr. 96)*. Bởi vậy: *Dạy học toán, xét về mặt nào đó là dạy học một NN, đặc biệt, có tác dụng to lớn trong việc diễn tả các sự kiện, phương pháp trong nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau (2; tr. 7)*.

Để góp phần phát triển NNTH cho học sinh (HS), chúng tôi đề xuất một số quan điểm chủ đạo sau trong quá trình dạy học toán:

1. Rèn luyện thường xuyên cho HS hiểu đúng, sử dụng chính xác, hợp lí NN của lí thuyết tập hợp và logic toán cùng các kí hiệu và thuật ngữ toán học để trình bày lời giải, kịp thời phân tích và sửa chữa sai lầm mà HS có thể mắc phải

Giúp HS nắm vững, hiểu và sử dụng đúng các liên từ liên kết logic như: và, hoặc, nếu, thì, phủ định... những lượng từ tồn tại và khái quát, các kí hiệu để diễn đạt nội dung toán học. Điều này cần được thực hiện thường xuyên, bởi trong giờ học Toán, HS thường gặp và sử dụng. Để bồi dưỡng kĩ năng này, giáo viên (GV) có thể cho HS làm các bài tập như:

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau: a) $\forall x \in \mathbb{N}^*, n^2 - 1$ là bội của 3; b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$; c) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 = 3$.

Ví dụ 2: Khi giải phương trình (PT) quy về PT bậc nhất hoặc bậc hai, yêu cầu HS xét nghiệm các PT này trên phương diện tập hợp và logic. Chẳng hạn, với PT dạng $|ax + b| = |cx + d|$ có thể phát biểu: tập hợp nghiệm của PT $|ax + b| = |cx + d|$ là hợp của hai tập nghiệm các PT $ax + b = cx + d$ và $ax + b = -(cx + d)$. Một số là

nh nghiệm của PT $|ax + b| = |cx + d|$ khi và chỉ khi nó là nghiệm của PT: $ax + b = cx + d$ hoặc PT: $ax + b = -(cx + d)$.

2. Rèn luyện HS sử dụng NN, kí hiệu nhằm diễn đạt một nội dung toán học theo nhiều cách khác nhau, từ đó, chọn cách theo hướng thuận lợi cho vấn đề cần giải quyết

GV giúp HS nắm được: cùng một vấn đề, có thể phát biểu dưới nhiều dạng khác nhau (qua đó sẽ nắm vững vấn đề hơn). Thông thường, GV chỉ yêu cầu HS nêu một phương án phát biểu đúng định nghĩa, song, như vậy sẽ hạn chế khả năng diễn đạt của HS, một số trường hợp có thể hạn chế HS hiểu bản chất vấn đề. Do đó, trong dạy học khái niệm, định lí, GV cần tổ chức cho HS rèn luyện NN, sử dụng các kí hiệu toán học để nêu vấn đề (kĩ năng diễn đạt bằng lời và bằng kí hiệu). Lựa chọn các cách định nghĩa tương đương của một khái niệm tùy từng vấn đề, bài toán đặt ra. Ví dụ: Khái niệm hàm số đồng biến trên $(a; b)$ có thể được định nghĩa theo hai cách: Cách 1: Hàm $f(x)$ được gọi là đồng biến trên $(a; b)$ nếu với mọi x_1 và x_2 thuộc khoảng $(a; b)$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$; Cách 2: Hàm $f(x)$ được gọi là đồng biến trên $(a; b)$ nếu $\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Hai cách định nghĩa đó

là tương đương, tuy nhiên, khi chứng minh các định lí 1: Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$, nếu $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \geq 0 \forall x \in (a; b)$; định lí 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ là đồng biến trên khoảng đó (Đại số và Giải tích 12), thì lại nên dùng định nghĩa thứ hai. Bởi, khái niệm đạo hàm có liên quan trực tiếp đến tỉ số giữa số gia hàm số và số gia đối số.

NNTH là NN khoa học đòi hỏi sự ngắn gọn, chính xác, dễ hiểu. HS thường gặp khó khăn trong

* Trường THPT Đông Sơn 2 - Đông Sơn - Thanh Hoá

Tạp chí Giáo dục số 253 (kì 1 - 1/2011)

việc diễn đạt, nên việc rèn luyện cho HS khả năng chuyển đổi NN, cách phát biểu bài toán là rất cần thiết. Khi thực hiện chuyển đổi bài toán, quá trình lập luận cần có căn cứ, đảm bảo tính chặt chẽ. Chẳng hạn, khi giải PT, bất PT bằng phương pháp đặt ẩn số phụ, việc chuyển yêu cầu bài toán sang yêu cầu đối với ẩn phụ là không tránh khỏi. Để rèn luyện việc chuyển đổi NN cho HS, GV cần tiến hành phân tích vấn đề trước khi đưa ra lập luận. Để góp phần bồi dưỡng cho HS khả năng chuyển đổi bài toán ban đầu thành các bài toán tương đương, cần lưu ý các vấn đề sau:

1) Hình thành cho HS khả năng phát hiện sự tương ứng, từ đó, rèn luyện kỹ năng chuyển đổi NN, cách phát biểu bài toán. Việc đặt ẩn phụ nhằm chuyển bài toán về dạng khác, với mong muốn bài toán với ẩn mới (ẩn phụ) sẽ dễ giải hơn so với bài toán ban đầu. Để phát hiện và đặt ẩn phụ phù hợp, đòi hỏi người làm toán cần nghiên cứu kỹ, vận dụng các mối liên hệ trong bài, huy động kiến thức, kinh nghiệm đã có. Tuy nhiên, sau khi đưa ra cách thức đặt ẩn phụ, cần đặt điều kiện cho ẩn, phát hiện mối tương quan giữa ẩn phụ và ẩn ban đầu, từ đó chuyển đổi yêu cầu của bài toán; đây là một khâu quan trọng trong quá trình giải bài toán, nó quyết định đến kết quả đúng sai của lời giải, và cũng là một kỹ năng mà HS hay gặp phải những sai sót.

Chẳng hạn, để giải PT, bất PT nhiều khi ta sử dụng phép đặt ẩn phụ $t = \varphi(x)$, mối liên hệ giữa ẩn ban đầu và ẩn phụ được thể hiện thông qua hàm số φ . GV cần giúp HS nhận ra mối tương quan giữa t và x , HS trả lời câu hỏi: với giá trị t bất kỳ, sẽ có bao nhiêu giá trị x tương ứng? Với giá trị x bất kỳ thuộc miền xác định của bài toán, tồn tại một giá trị t , tuy nhiên, vấn đề mà ta cần quan tâm lại là vấn đề ngược lại. Trước hết, GV hướng dẫn HS nhận ra với giá trị nào của ẩn t thì tồn tại giá trị x tương ứng, điều kiện này tương đương với việc tìm điều kiện cho tham số t để PT $t = \varphi(x)$ có nghiệm. HS cần trả lời câu hỏi: Với những giá trị nào của t thì PT $t = \varphi(x)$ tồn tại x ? Với giá trị nào của t thì PT $t = \varphi(x)$ sẽ không tồn tại x ? Chẳng hạn, phép đặt ẩn phụ trong ví dụ 3:

Ví dụ 3: Cho PT: $2(x^2 - 2x) + \sqrt{x^2 - 2x + 5} - m = 0$ (1). Với giá trị nào của m thì PT đã cho có nghiệm.

Để giải PT (1), dùng phép đặt ẩn phụ: $t = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$. GV có thể đưa ra câu hỏi:

Hãy chỉ ra miền xác định của ẩn x ? có thể nói gì về biểu thức dưới dấu căn? ($x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 \geq 4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$); có xác định được giá trị lớn nhất của biểu thức dưới dấu căn hay không? (không vì khi x dần tới $+\infty$ thì $(x^2 - 2x + 5)$ sẽ dần tới $+\infty$). Hãy chỉ ra miền giá trị của t ? (miền giá trị của t là $[2; +\infty)$); với giá trị nào của t thì PT $t = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ có nghiệm?; với cách đặt ẩn phụ đó, PT mới là PT nào? (là PT: $2t^2 + t - m - 10 = 0$ (2)); để PT (1) có nghiệm thì PT (2) phải có điều kiện gì? (để PT (1) có nghiệm thì (2) phải có nghiệm thỏa mãn $t \geq 2$).

Trong ví dụ 3, GV cần có sự phân tích, diễn giải, giúp HS phát hiện được điều kiện của ẩn phụ cũng như mối tương quan giữa ẩn phụ và ẩn ban đầu. Ở đây, không phải mọi giá trị của ẩn phụ đều dẫn tới sự tồn tại của ẩn ban đầu, mà chỉ những giá trị ẩn phụ thỏa mãn $t \geq 2$ mới dẫn đến sự tồn tại của ẩn ban đầu tương ứng. Tuy nhiên, để HS hiểu sâu sắc sự tương quan giữa ẩn phụ và ẩn ban đầu, GV có thể thay đổi yêu cầu bài toán, sau đó HS dùng hoạt động suy luận để giải quyết như ở ví dụ 5.

Ví dụ 4: Với điều kiện nào của PT (2) thì PT (1): a) Có đúng 1 nghiệm; b) Có đúng 2 nghiệm; c) Có đúng 3 nghiệm; d) Có đúng 4 nghiệm; e) Vô nghiệm.

Để giải bài toán này, HS xét mối tương quan giữa ẩn phụ t và ẩn ban đầu x , đưa ra vấn đề: với mỗi giá trị $t \geq 2$, tồn tại bao nhiêu giá trị x tương ứng?

2) Khi dạy học các chủ đề kiến thức, cần giúp HS ý thức được mối liên hệ giữa các tri thức toán học khác nhau.

Ví dụ 5: Khi dạy học khái niệm miền giá trị của hàm số ở lớp 10, GV nên dẫn dắt HS hình thành khái niệm miền giá trị của hàm số $y = f(x)$ trên miền D là tập $I = \{y_0 \in \mathbb{I} \mid y_0 = f(x), \forall x \in D\}$.

Từ đây, GV có thể đưa ra khái niệm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên D , sau đó, đưa ra câu hỏi gợi mở: Có nhận xét gì về nghiệm của PT $f(x) = y_0$ nếu y_0 là một giá trị bất kỳ thuộc I ? Nếu PT $f(x) = y_0$ có nghiệm $x \in D$, có nhận xét gì về giá trị y_0 ? Trên cơ sở đó, HS rút ra nhận xét: $y_0 \in I$ (tập giá trị của hàm số $y = f(x)$) \Leftrightarrow PT $f(x) = y_0$ có nghiệm $x \in D$. Như vậy, HS nhận thấy bài toán tìm miền giá trị của hàm số có thể chuyển sang bài toán tương đương là: Tìm y_0 để PT $f(x) = y_0$ có nghiệm $x \in D$.

3) Trang bị cho HS kiến thức về các phép biến đổi tương đương, giúp HS hiểu và sử dụng đúng các phép biến đổi hệ quả hoặc biến đổi tương đương khi chuyển đổi bài toán. Để xác định hai PT có tương đương với nhau hay không, cần dựa vào định nghĩa để xét tập nghiệm của chúng. Lưu ý cho HS định lí 1 (Đại số 10 nâng cao) về phép biến đổi tương đương: «Cho PT $f(x) = g(x)$ có TXĐ là D ; $y = h(x)$ là một hàm số xác định trên D ($h(x)$ có thể là một hằng số). Khi đó trên D , PT đã cho tương đương với mỗi PT sau: 1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$; 2) $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ nếu $h(x) \neq 0$ với mọi $x \in D$ ».

Để khắc sâu định lí 1, GV có thể đưa ra các bài tập tiếp theo như: Ví dụ 6: Giải PT: $x^2 + \sqrt{x-1} = 4 + \sqrt{x-1}$ (1). Một HS lập luận: «PT (1) có tập xác định là $D = [1; +\infty)$, xét hàm số: $h(x) = -\sqrt{x-1}$ xác định trên D . Cộng cả hai vế PT (1) với $h(x)$, ta được PT mới tương đương với PT (1): $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Vậy, PT (1) có 2 nghiệm $x = \pm 2$ ». GV đặt câu hỏi: $x = \pm 2$ có là nghiệm của PT (1) hay không? Tại sao $x = -2$ lại không là nghiệm? GV cần cho HS thấy: PT (1) $\Leftrightarrow x^2 = 4$ xảy ra trên $D = [1; +\infty)$. Do vậy, loại nghiệm $x = -2$ vì không thuộc miền D , kết luận PT đã cho có nghiệm $x = 2$. GV cần yêu cầu HS đặt điều kiện xác định đối với các PT có chứa các phép toán khai căn bậc chẵn, chứa logarit, chứa ẩn ở mẫu. Trong quá trình dạy học, GV nên đưa ra một lượng bài tập về phép biến đổi tương đương nhất định, nhằm giúp HS có cái nhìn toàn diện, sâu sắc trong các bài tập dạng này.

Trong thực hành giải toán, thường sử dụng phép bình phương hai vế vào giải PT vô tỉ, PT chứa dấu giá trị tuyệt đối. Để phép biến đổi là tương đương, ta chuyển hạng tử chứa căn về một vế để vế đó dương, vế còn lại đặt thêm điều kiện dương để tiến hành bình phương. Chẳng hạn, bài toán: Giải PT: $\sqrt{x+4} - \sqrt{1-x} = \sqrt{1-2x}$ (2). Thực hiện phép biến đổi: với điều kiện: $x \leq 1/2$, (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}$. Khi đó, ta có thể bình phương cả hai vế. Trong phép biến đổi để giải PT, có những phép biến đổi dẫn tới PT hệ quả, tuy nhiên, đây là điều không dễ nhận ra đối với HS. GV cần đưa ra các bài toán cụ thể để khắc sâu kiến thức cho HS.

3. Giúp HS biết chuyển từ NNTH thông thường sang thuật ngữ và kí hiệu của logic toán và ngược lại. Đồng thời, rèn luyện cho

HS khả năng vận dụng kiến thức toán học vào các bài toán thực tiễn

1) Giúp HS phân biệt được điều kiện cần và điều kiện đủ, HS rất hay nhầm lẫn giữa điều kiện cần và điều kiện đủ. GV cần giảng giải và cho HS thực hành nhiều và có thể đưa ra các bài tập để khắc sâu kiến thức cho HS, chẳng hạn:

Ví dụ 6: a) Điều kiện cần để một tứ giác là hình chữ nhật là tứ giác đó có hai đường chéo bằng nhau. Điều kiện cần này chưa phải là điều kiện đủ vì tứ giác có hai đường chéo bằng nhau chưa chắc là hình chữ nhật (có thể phát biểu: điều kiện «tứ giác có hai đường chéo bằng nhau» là điều kiện cần để tứ giác đó là hình chữ nhật).

b) Điều kiện đủ cho một tứ giác lồi nội tiếp là tứ giác đó có bốn góc bằng nhau. Điều kiện này không phải là điều kiện cần vì có những tứ giác nội tiếp mà không có bốn góc bằng nhau.

2) Giúp HS phân biệt được đặc thù suy luận của NN tự nhiên với suy luận trong Toán học. Để minh họa cho vấn đề này, có thể xuất phát từ câu nói rất thông thường sau đây: Ví dụ: «Nếu con được điểm 10 thì mẹ sẽ thưởng cho một bộ sách». Câu này trong tiếng Việt được hiểu: nếu được điểm 10 thì thưởng, nếu không được thì không được thưởng và nếu được thưởng tức là được điểm 10. Trong các mệnh đề toán học có cấu trúc: «Nếu... thì...», ta không hiểu như vậy được, chẳng hạn: «Nếu $f'(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ », nhưng không thể nói: nếu không phải $f'(x) > 0 \forall x \in (a; b)$ thì $f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$.

3) Cần uốn nắn việc lạm dụng kí hiệu toán học để thay thế cho cách viết thông thường. GV cần kịp thời chấn chỉnh những cách viết như: «từ đó \Rightarrow PT vô nghiệm»; «không \exists giá trị nào của tham số». Để HS biết chuyển đổi từ một tình huống cụ thể sang NNTH và từ NNTH sang NN thực tiễn, cần tập cho HS biết xét những đại lượng trong những mối liên hệ với nhau, phát hiện các mối liên quan về lượng để trên cơ sở đó, lập PT, hệ PT hay hệ bất PT rèn luyện tư duy biện chứng cho HS.

4. Rèn luyện HS về cú pháp và ngữ nghĩa

W. Walsch đã nêu lên hai mặt ngữ nghĩa và cú pháp của một số đối tượng thường gặp trong toán học: Phương diện ngữ nghĩa của toán học là xem xét nội dung những mệnh đề toán học và nghĩa của những cách đặt vấn đề toán

học. Phương diện cú pháp là xem xét cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức của những biểu thức toán học, sự làm việc theo những quy tắc xác định là sự làm việc theo thuật giải (3). Mối quan hệ của hai mặt ngữ nghĩa và cú pháp có thể xem là quan hệ giữa nội dung và hình thức. Nếu coi trọng rèn luyện mặt ngữ nghĩa mà sao nhãng việc rèn luyện mặt cú pháp sẽ dẫn tới HS không sử dụng được các công cụ hình thức của toán học; ngược lại, sẽ làm cho HS tiếp thu kiến thức một cách cứng nhắc, hình thức, không vận dụng được vào thực tiễn.

Trong chương trình Toán phổ thông, việc dạy học giải các PT, bất PT, hệ hai PT bậc nhất hai ẩn,... là cơ hội tốt cho HS rèn luyện cách suy nghĩ về mặt cú pháp. Ngoài ra, GV cần yêu cầu HS nhận xét cấu trúc dãy kí hiệu biểu thị PT, bất PT, từ đó đề xuất những phép biến đổi thích hợp và xác định phép biến đổi là đưa về dạng nào. Tuy nhiên, ngay khi HS đã học những phép biến đổi PT, bất PT và nắm được các thuật giải thì cũng không thể sao nhãng phương diện ngữ nghĩa, trái lại, cần khéo léo kết hợp cả hai phương diện này. Việc kết hợp có thể được thực hiện bằng cách cho HS giải những bài toán đòi hỏi sự vận dụng một số kiến thức liên quan tới ý nghĩa của các kí hiệu, sau đó mới đưa ra những dạng bài tập đã biết cách giải tổng quát. Chẳng hạn, sau khi HS đã biết cách giải hệ bất PT bậc hai, cho HS làm bài tập sau:

Ví dụ 7: Giải bất PT: $x^2 - x + |3x - 2| > 0$.

Trước hết, HS cần hiểu được khái niệm giá trị tuyệt đối để đưa bất PT đã cho về hai hệ bất PT

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases}.$$

Những suy nghĩ này thuộc về phương diện ngữ nghĩa. Sau đó, HS có thể giải hai hệ bất PT trên nhờ quy tắc giải hệ bất PT, một quy tắc có tính chất cú pháp. Tiếp đó, ta lại khai thác ý nghĩa của khái niệm giá trị tuyệt đối để HS thấy được tập hợp nghiệm của bất PT cho trước bằng hợp hai tập nghiệm

$$\text{của hai hệ bất PT } \begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 2 < 0 \\ x^2 - 4x + 2 > 0 \end{cases}.$$

Từ đó, xác định được tập nghiệm của bất PT đã cho. □

(1) Phạm Văn Hoàn - Trần Thúc Trình - Nguyễn Gia Cốc. **Giáo dục học môn Toán**. NXB Giáo dục, H. 1981.

(2) Hoàng Chúng. **Một số vấn đề về giảng dạy ngôn ngữ và kí hiệu Toán học ở trường phổ thông cấp 2**. Bộ GD-ĐT - Vụ Giáo viên, H. 1994.

(3) Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB Đại học sư phạm, H. 2002.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Thuận. *Góp phần phát triển năng lực tư duy logic và sử dụng chính xác ngôn ngữ toán học cho học sinh đầu cấp trung học phổ thông trong dạy học Đại số*. Luận án Tiến sĩ Giáo dục học, Vinh, 2004.

Sử dụng phương pháp...

(Tiếp theo trang 31)

Cách thức tổ chức đàm thoại phải rất năng động, sáng tạo trong các tình huống cụ thể. Có thể tiến hành đàm thoại cá nhân, đàm thoại giữa GV với HV và giữa HV với HV.

2.4. *Kết hợp thuyết trình với sử dụng công nghệ thông tin trong dạy học*. Để nâng cao chất lượng, hiệu quả của PPTT trong giảng dạy các môn KHXH-NV trước hết cần có sự hỗ trợ của phần mềm Powerpoint. Phần mềm này vừa làm tăng tính trực quan vừa có thể diễn tả một cách sinh động và hấp dẫn các nội dung trừu tượng, phức tạp của môn học. Với sự trợ giúp của phần mềm Powerpoint, GV có thể trình bày trực quan những nội dung cơ bản cần được nhấn mạnh của bài giảng, mở rộng những vấn đề lí luận và thực tiễn cần liên hệ.

Với khả năng siêu liên kết của phần mềm Powerpoint và sự trợ giúp của các thiết bị dạy học hiện đại, nguồn thông tin dạy học sẽ trở nên vô cùng phong phú. Trong một buổi học, người học có thể tiếp xúc với các nguồn thông tin đa dạng. Cùng một lúc GV có thể tác động vào nhiều giác quan của người học, mỗi giác quan được xem như một kênh nhận tin dưới dạng các tín hiệu khác nhau.

3. Thuyết trình là phương pháp lâu đời nhất trong lịch sử dạy học, hiện nay vẫn được sử dụng khá phổ biến, đặc biệt trong giảng dạy các môn KHXH-NV. Mặc dù có không ít quan điểm khác nhau về phương pháp này song có thể nói, ở đâu có quá trình dạy học thì ở đó có PPTT. Đơn giản không phải vì bản thân phương pháp mà chính nội dung dạy học quy định sự tồn tại của nó. Vấn đề đặt ra là phải tìm cách phát huy tối đa những ưu thế riêng và tìm cách khắc phục những hạn chế của vốn có của thuyết trình. □