

# DAY HỌC CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ VỀ PHÉP BIẾN HÌNH VỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA PHẦN MỀM DẠY HỌC

○ PGS. TS. NGUYỄN VĂN LỘC\*

1. Quy trình dạy học định lý (ĐL) về phép biến hình (PBH) với sự hỗ trợ của phần mềm dạy học (PMDH)

1) *Hình thành biểu tượng về ĐL.* Ở bước này, sử dụng PMDH tạo ảnh của hình cho trước, di chuyển tạo ảnh để xác định vị trí tương ứng, hoặc lập mặt phẳng tọa độ của phương trình tạo ảnh. Từ đó, xác định phương trình của ảnh và mối liên hệ về định tính và định lượng giữa ảnh và tạo ảnh.

2) *Xác định cấu trúc của ĐL và chứng minh ĐL.* Cần thực hiện các hoạt động sau: - *Hoạt động ngôn ngữ* nhằm xác định nội hàm và ngoại diên các khái niệm nêu trong ĐL bằng cách phát biểu ĐL dưới các hình thức khác nhau, chuyển từ ngôn ngữ thông thường sang ngôn ngữ kí hiệu. Với mỗi cách, tương ứng với các biểu tượng trực quan hình học, giúp sự định hướng tìm ra phương pháp chứng minh ngắn gọn và tối ưu; - *Hoạt động logic:* Xác định cấu trúc logic, phân biệt tiền đề và kết luận của ĐL; - *Hoạt động chứng minh ĐL:* Xác định các cách tiếp cận để chứng minh ĐL.

3) *Hình thành và rèn luyện kĩ năng vận dụng ĐL,* thông qua các dạng câu hỏi, bài tập như: *Dạng 1.* Phát hiện và chứng minh các hệ quả bằng cách «bài tập hóa» kết quả của ĐL về PBH; *Dạng 2.* Tìm ảnh của một điểm, đường thẳng, đường tròn, tam giác qua PBH, xác định khoảng cách giữa các cặp điểm trên mặt phẳng tọa độ. Trong lớp các bài toán dạng này, thay giá trị tọa độ của tạo ảnh ta có ngay giá trị tọa độ của ảnh, giúp giáo viên (GV) có thể tổ chức cho học sinh (HS) «tương tác» trên PMDH, đây là một ưu thế mà với phương pháp dạy học truyền thống khó thực hiện được; *Dạng 3.* Xác định PBH phù hợp, vận dụng các tính chất của PBH vào giải bài tập toán. Trong các bài toán, cần phân tích tường minh yếu tố xác định PBH, xác định PBH thích hợp để giải toán; các bài tập rèn luyện kĩ năng, vận dụng ĐL được thiết kế theo hướng nâng

cao dần mức độ khó. Trong các PMDH hiện nay, có thể sử dụng PMDH Cabri 2D với các thanh công cụ đã được dịch bằng tiếng Việt hỗ trợ dạy học các ĐL về PBH.

2. Dạy học chứng minh ĐL: «Phép đối xứng trục (PDXT) bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì»

1) *Hình thành biểu tượng về ĐL «PDXT bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì».* Thông qua hoạt động tạo hình, bằng cách nêu một bài toán, sau đó hướng dẫn HS thực hiện các phép dựng hình trên phần mềm Cabri, sử dụng thanh công cụ «khoảng cách» hoặc «độ dài», so sánh độ dài các đoạn thẳng ảnh và tạo ảnh ứng với vị trí đã xác định.

*Ví dụ 1:* Cho đường thẳng  $a$  và hai điểm  $M, N$  phân biệt. Gọi  $M', N'$  lần lượt là ảnh của  $M, N$  qua đường thẳng  $a$  (phép đối xứng  $\mathcal{D}_a$ ). Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng  $MN$  và  $M'N'$  khi  $M, N$  di chuyển.

Hướng dẫn HS sử dụng thanh công cụ «đường thẳng» để dựng đường thẳng, tiếp theo, sử dụng thanh công cụ «điểm» xác định  $M, N$ , dựng các điểm  $M', N'$ . Sau đó, đo khoảng cách  $MN, M'N'$ , so sánh  $MN$  và  $M'N'$ . Dùng nút «chọn» di chuyển các điểm  $M, N$ , rút ra nhận xét: khi  $M, N$  di chuyển vẫn có kết quả:  $M'N' = MN$ .

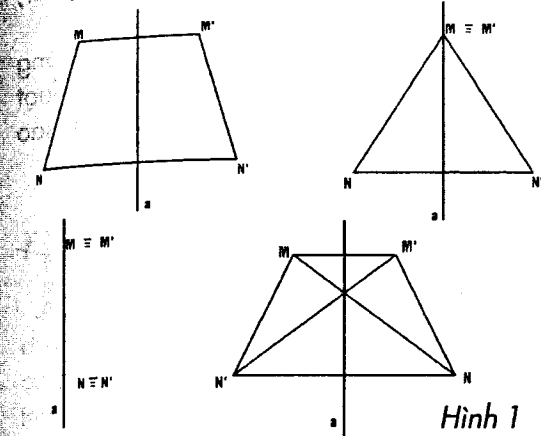
Các phép dựng hình trên phần mềm Cabri: - Vẽ đường thẳng  $a$ ; - Vẽ các điểm  $M, N$ ; - Vẽ  $M'$  đối xứng với  $M$  qua  $a$ ,  $N'$  đối xứng với  $N$  qua  $a$ ; - Cho các điểm  $M, N$  di chuyển kéo theo  $M', N'$  di chuyển; - Đo độ dài  $MN, M'N'$ .

2) *Xác định cấu trúc và chứng minh ĐL về PDXT*

a) *Hoạt động ngôn ngữ.* Với ĐL «PDXT bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì» có thể chuyển sang ngôn ngữ kí hiệu của hình học tổng hợp, ngôn ngữ vectơ, tọa độ.

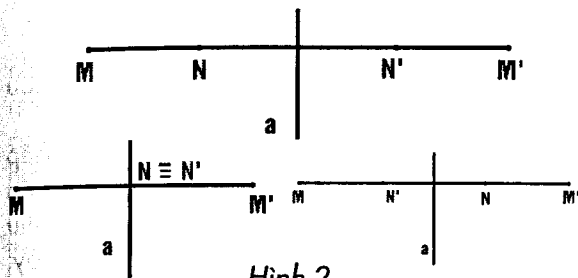
\* Trường Đại học sư phạm TP. Hồ Chí Minh

Với ngôn ngữ hình học tổng hợp, biểu tượng trực quan về  $M'N' = MN$  biểu hiện trong các trường hợp sau: Trường hợp 1: Đường thẳng  $MN$  không vuông góc với trục  $a$  (hình 1).



Hình 1

Trường hợp 2:  $MN$  vuông góc với trục  $a$  (hình 2).



Hình 2

Với cách phân hoạch như các trường hợp trên, việc chứng minh ĐL bằng phương pháp tổng hợp là rất khó khăn.

- Với ngôn ngữ vector, chứng minh  $M'N' = MN$  chuyển về chứng minh:  $|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}|$ .

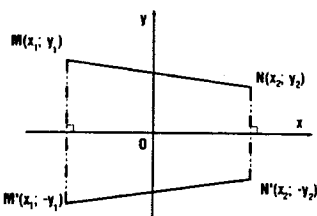
- Với ngôn ngữ tọa độ, chứng minh  $M'N' = MN$  tương đương với chứng minh giá trị các biểu thức khoảng cách bằng nhau:

$$M'N' = MN \Leftrightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

b) Hoạt động logic: Với ĐL trên, tiền đề của ĐL bao gồm các dữ kiện: Cho trục  $a$ ,  $M, N$  là tạo ảnh,  $M', N'$  tương ứng là ảnh của  $M, N$  qua PDXT  $a$ . Kết luận của ĐL là  $M'N' = MN$ .

c) Hoạt động chứng minh ĐL.

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho trục đối xứng  $a$  là trục  $Ox$  (hình 3). Phép  $\mathcal{D}_{Ox}$  biến  $M(x_1; y_1)$  thành  $M'(x_1; -y_1)$ ;  $N(x_2; y_2)$  thành  $N'(x_2; -y_2)$ , ta có:



Hình 3

$$MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M'N' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Vậy  $M'N' = MN$ .

3) Hình thành và rèn luyện kỹ năng vận dụng ĐL về PDXT.

Dạng 1: «Bài tập hóa» các hệ quả của ĐL. Sau khi chứng minh ĐL, để việc dạy học các hệ quả thực hiện được chức năng kép «vừa làm sâu sắc thêm tri thức về ĐL vừa rèn kỹ năng vận dụng ĐL» cần «bài tập hóa» các hệ quả theo hướng tổ chức cho HS thao tác với phần mềm Cabri, nhằm hình thành biểu tượng về hệ quả, sử dụng các «kỹ thuật» chứng minh ĐL để chứng minh các hệ quả. Chẳng hạn, xét hệ quả sau:

Hệ quả 1: PDXT biến ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng với  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$  thành ba điểm tương ứng  $A', B', C'$  thẳng hàng với  $B'$  nằm giữa  $A'$  và  $C'$ .

a) Hình thành biểu tượng về hệ quả 1. Ở bước này có thể hướng dẫn cho HS «thao tác» trên phần mềm Cabri.

Ví dụ: Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng với  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Gọi  $A', B', C'$  là ảnh của  $A, B, C$  qua PDXT  $a$ . Hãy nhận xét về vị trí của ba điểm  $A', B', C'$  khi  $B$  di chuyển trên đoạn  $AC$ ?

Nhận xét: Ba điểm  $A', B', C'$  thẳng hàng với  $B'$  nằm giữa  $A'$  và  $C'$ .

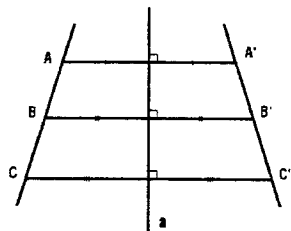
b) Chứng minh hệ quả: Gọi  $A' = \mathcal{D}_a(A)$ ;  $B' = \mathcal{D}_a(B)$ ;  $C' = \mathcal{D}_a(C)$ . Theo kết quả ở ví dụ 1 thì:

$A'B' = AB$ ;  $B'C' = BC$ ;  $A'C' = AC$  (1). Vì  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$  nên:  $AB + BC = AC$  (2). Từ (1) và (2) suy ra:  $A'B' + B'C' = A'C'$  (3). Đẳng thức (3) chứng tỏ  $A', B', C'$  cũng thẳng hàng và  $B'$  nằm giữa  $A', C'$ .

Dạng 2: Tìm ảnh của điểm, đường thẳng, đường tròn, tam giác qua PDXT trên mặt phẳng tọa độ và xác định khoảng cách giữa các cặp điểm trên mặt phẳng tọa độ.

Ví dụ 2: Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 3 điểm  $A(-3; 1)$ ;  $B(4; -2)$ ;  $C(2; 5)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là 3 đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác là ảnh của các điểm  $A, B, C$  qua phép đối xứng  $\mathcal{D}_{Ox}$ ;  $\mathcal{D}_{Oy}$ .



Hình 4

b) Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng  $d, d'$  là ảnh của đường thẳng  $AC$  qua phép đối xứng  $\mathcal{D}_{O_x}$  và  $\mathcal{D}_{O_y}$ .

c) Kiểm tra số đo độ dài các đoạn thẳng chứng tỏ rằng  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$  (hình 5).

*Giải*

a) Ta có:  $\overline{AB} = (7; -3); \overline{AC} = (5; 4)$ . Ta thấy ngay

$\overline{AB}$  không cùng phương với  $\overline{AC}$  ( vì  $\frac{7}{5} \neq \frac{-3}{4}$  ), suy

ra  $A, B, C$  là 3 đỉnh của một tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là ảnh của  $A, B, C$  qua phép  $\mathcal{D}_{O_x}$  và  $A'', B'', C''$  lần lượt là ảnh của  $A, B, C$  qua phép  $\mathcal{D}_{O_y}$ . Áp dụng biểu thức tọa độ của các PĐXT, ta có:

$A'(-3; -1); B'(4; 2); C'(2; -5)$  và  $A''(3; 1); B''(-4; -2); C''(-2; 5)$ .

b)  $d$  chính là đường thẳng đi qua hai điểm  $A'$  và  $C'$ :

$$d: 4x + 5y + 17 = 0$$

$d'$  chính là đường thẳng qua 2 điểm  $A'', C''$ :

$$d': 4x + 5y - 17 = 0$$

c) Sử dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 điểm, ta có:  $AB = A'B' = \sqrt{58}$

$AC = A'C' = \sqrt{41}, BC = B'C' = \sqrt{53}$ . Vậy  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ .

*Lưu ý:* Sử dụng tính chất của PĐXT, ta có thể suy ra hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  bằng nhau.

Trong ví dụ 2, hướng dẫn HS thao tác trên thanh công cụ của phần mềm Cabri để dựng các tam giác  $A'B'C', A''B''C''$ , các đường thẳng  $d, d'$ . Đồng thời, hướng dẫn HS thay giá trị tọa độ các điểm  $A, B, C$  thu được tọa độ các điểm  $A', B', C'$  và  $A'', B'', C''$ , phương trình các đường thẳng  $d, d'$ .

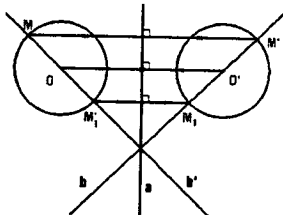
Chẳng hạn, khi thay giá trị tọa độ các điểm:  $A(-2; 3), B(5; -3), C(3; 4)$ , ta được tọa độ các điểm  $A'(-2; -3), B'(5; 3), C'(3; -4)$  và  $A''(2; 3), B''(-5; -3), C''(-3; 4)$ , phương trình các đường thẳng  $d: x + 5y + 17 = 0$  và  $d': x + 5y - 17 = 0$ . Sử dụng thanh công cụ «đo độ dài» hoặc «khoảng cách» sẽ cho kết quả về độ dài các đoạn thẳng bằng nhau. Hoạt động này giúp củng cố tri thức về các tính chất của PĐXT, khơi dậy sự say mê học tập của HS.

*Dạng 3: Xác định PĐXT thích hợp và vận dụng linh hoạt các tính chất của PĐXT trong giải bài tập*

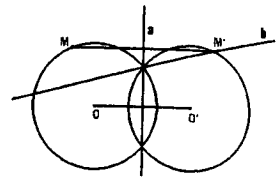
toán mà đề ra chưa cho tường minh PĐXT. Trong các bài toán này, cần hướng dẫn HS phân tích, phát hiện các yếu tố xác định của PĐXT, xác định ảnh và tạo ảnh, từ đó, định hướng cách dùng PĐXT, sử dụng các tính chất của PĐXT để giải toán.

*Ví dụ 3:* Cho các đường thẳng  $a; b$  và đường tròn  $(O)$ . Hãy xác định hai điểm  $M, M'$  lần lượt nằm trên đường tròn  $(O)$  và đường thẳng  $b$  sao cho  $a$  là đường trung trực của  $MM'$ .

*Giải*



Hình 6a. Minh họa cho trường hợp có hai cặp  $(M, M')$ .



Hình 6b. Minh họa trường hợp có một cặp điểm  $(M, M')$ .

Giả sử đã tìm được  $M, M'$  thỏa mãn yêu cầu bài toán, khi đó:

$\mathcal{D}_a(M) = M'$ , với  $(O')$  là ảnh của  $(O)$  qua phép đối xứng  $\mathcal{D}_a$ . Vì vậy,  $M'$  chính là giao điểm của  $b$  và  $(O')$ . Các điểm  $M$  và  $M'$  được xác định như sau: - Dựng  $(O')$  đối xứng với  $(O)$  qua  $a$ , lấy:  $M' = (O') \cap b$ ; - Dựng  $M$  đối xứng với  $M'$  qua  $a$  thì  $(M, M')$  là cặp điểm cần dựng.

Thật vậy, theo cách dựng ta dễ thấy  $a$  là đường trung trực của  $MM'$ ,  $M$  và  $M'$  lần lượt nằm trên đường tròn  $(O)$  và đường thẳng  $b$ .

Tùy vào số giao điểm của  $(O')$  và đường thẳng  $b$ , vị trí tương đối giữa hai đường tròn  $(O)$  và  $(O')$  mà có hai, một hoặc không có cặp điểm  $(M, M')$  nào cần xác định.

\*\*\*

Dạy học chứng minh ĐL được thực hiện trên cơ sở dạy học khái niệm, là bước chuẩn bị quan trọng cho dạy học giải bài tập toán. Do vậy, quy trình dạy học ĐL cần kế thừa và phát triển quy trình dạy học khái niệm trong hình thành biểu tượng và chuẩn bị các yếu tố logic trong việc tạo ra chuỗi bài toán. Với sự hỗ trợ của PMDH, có thể giúp sự tương tác giữa GV và HS đạt hiệu quả cao, tạo hứng thú học tập và phát huy tính sáng tạo của HS.  $\square$

#### Tài liệu tham khảo

1. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên). **Hình học 11**. NXB Giáo dục, H. 2007.
2. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên). **Hình học 11** (nâng cao). NXB Giáo dục, H. 2007.