GIÚP HỌC SINH RÈN LUYỆN TƯ DUY THÔNG QUA VIỆC KHAI THÁC KẾT QUẢ CỦA MỘT BÀI TOÁN

O ThS. NGUYỄN THỊ QUYÊN - ThS. HOÀNG DIỆU HỒNG*

Phát triển tư duy (TD) cho học sinh (HS) là một nhiệm vụ quan trọng trong quá trình dạy học. Sự phát triển TD nói chung được dựa trên việc rèn luyện các thao tác TD (như: phân tích, khái quát hóa, trừu tượng hóa,...) kết hợp với các phương pháp TD như quy nạp, suy diễn,... Trong quá trình dạy học, bài tập toán là phương tiện cơ bản để rèn luyện tư duy (RLTD), đồng thời giúp HS nắm vững và biết vận dụng kiến thức một cách linh hoạt. Bài viết này đề cập việc RLTD cho HS thông qua khai thác kết quả của một bài toán thành chuỗi bài toán mới, bài toán này là tiền đề cho việc giải bài toán khác. Việc khai thác kết quả của một bài toán đã biết không những giúp HS sáng tạo ra các bài toán mới, kết quả mới mà còn có tác dụng RLTD cho HS trong học tập môn Toán.

Bài toán xuất phát: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$ (1).

Đây là bài toán cơ bản về bất đẳng thức lượng giác trong tam giác thuộc chương trình toán phổ thông. Có rất nhiều cách giải bài toán này, mỗi cách giải đều hữu ích cho HS trong việc RLTD. Giáo viên (GV) có thể hướng dẫn HS giải bài toán ngắn gọn như sau:

Phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \le \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2} - 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} + 1 \ge 0$ (do $\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}$).

$\Leftrightarrow (2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2})^2 + \sin^2\frac{B-C}{2} \ge 0$ (bất đẳng thức này luôn đúng).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2} = 0 \\ \sin\frac{B-C}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\sin\frac{A}{2} = 1 \\ \frac{B-C}{2} = 0 \end{cases}$ (do $-\frac{\pi}{2} < \frac{B-C}{2} < \frac{\pi}{2}$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} = \frac{\pi}{6} \\ B = C \end{cases}$ (do $0 < \frac{A}{2} < \pi$) $\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\pi}{3} \\ B = C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Ở bài toán trên, bất đẳng thức thu được là đúng cho mọi tam giác. Như vậy, khi dạy học bài toán này, GV cần đưa ra một câu hỏi là: Liệu với cùng giả thiết như *ở bài toán xuất phát*, ta còn có thể thu được những bất đẳng thức lượng giác nào khác nữa? Có sự định hướng của GV, HS sẽ độc lập suy nghĩ và tìm câu trả lời.

Theo giả thiết của bài toán, A, B, C là ba góc của một tam giác bất kì, khi đó ta luôn có: $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}, \frac{C+A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}, \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$, các góc: $\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$; $\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}$; $\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ cũng là ba góc của một tam giác nào đó. Phép phân tích là một thao tác của TD, phân tích là chia một chỉnh thể ra làm nhiều phần riêng lẻ để đi sâu vào nghiên cứu chi tiết từng phần. Quá trình nghiên cứu phải mang tính định hướng cụ thể, chẳng hạn, đối với một bài toán có giả thiết và kết luận thì sự phân tích cần hướng vào mục đích tìm ra các mắt xích nối giữa giả thiết và kết luận. Trong dạy học, phép phân tích là một thao tác TD quan trọng để giải quyết vấn đề, HS cần được rèn luyện thường xuyên thao tác TD này trong quá trình học tập toán.

Tương tự với kết quả thu được của bài toán xuất phát, ta có bất đẳng thức sau: $\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}) \le \frac{3}{2}$ (2). Phép *tương tự* được xem như là tiền thân của khái quát hóa, trong những trường hợp nhất định, ta có thể coi quá trình thực hiện phép tương tự như là biểu

* Trường Đại học Hồng Đức

hiện của khái quát hóa. Sử dụng phép tương tự trong dạy học, GV có thể giúp HS phát hiện ra nhiều kết quả toán học khác. Tuy nhiên, GV cũng cần lưu ý cho HS rằng, những kết luận mang tính dự đoán, thiếu cơ sở khoa học được rút ra từ phép tương tự có thể là những kết luận sai.

Sử dụng phép tương tự, HS rút ra được công thức (2). Lại áp dụng tính chất: $\sin\frac{A}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2})$; $\sin\frac{B}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2})$; $\sin\frac{C}{2} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2})$, dựa vào kết quả của bất đẳng thức (2), ta được *bài toán 1:*

Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2}$.

Để có thể suy ra được nhiều bài toán mới, phải đặt các giá trị lượng giác trong mối quan hệ biện chứng với nhau. Ở đây, cần vận dụng kiến thức một cách linh hoạt, đưa ra những biến đổi hợp lí, sử dụng các công thức lượng giác một cách sáng tạo sẽ thu được bài toán mới. Dựa trên kết quả của *bài toán 1*, ta có *bài toán 2:*

Bài toán 2: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Phân tích: Để chứng minh bất đẳng thức này, HS cần nhận thấy được các biểu thức $\sin\frac{A}{2}, \sin\frac{B}{2}, \sin\frac{C}{2}$ đều là số dương nên sử dụng bất đẳng thức Côsi sẽ là một cách để chứng minh bài toán. HS cũng có thể tìm mối liên hệ giữa $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ với tổng cosA + cosB + cosC thông qua phép biến đổi các công thức lượng giác. GV có thể hướng dẫn HS tiếp cận với hai cách giải sau:

Cách 1: Từ kết quả của *bài toán 1* và áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta có:

$$3\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} \le \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}.$$

Cách 2 (bằng cách biến đổi các công thức lượng giác):

Ta có: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$

(do $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$) $= 1 - 2\sin\frac{A}{2}(\cos\frac{B+C}{2} - \cos\frac{B-C}{2})$

(do $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}$) $= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

Khi đó: $1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{8}$.

Lại sử dụng kết quả của *bài toán 2,* ta có bài toán tổng quát sau:

Bài toán 3: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sin^\alpha\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{C}{2}} \ge 3.2^\alpha, \forall \alpha > 0.$

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương $\frac{1}{\sin^\alpha\frac{A}{2}}; \frac{1}{\sin^\alpha\frac{B}{2}}; \frac{1}{\sin^\alpha\frac{C}{2}}$; khi đó:

$$\frac{1}{\sin^\alpha\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{C}{2}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\sin^\alpha\frac{A}{2}.\sin^\alpha\frac{B}{2}.\sin^\alpha\frac{C}{2}}}.$$

Mặt khác: $\sin^\alpha\frac{A}{2}\sin^\alpha\frac{B}{2}\sin^\alpha\frac{C}{2} = \left(\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^\alpha \le \left(\frac{1}{8}\right)^\alpha$;

suy ra: $\frac{3}{\sqrt[3]{\sin^\alpha\frac{A}{2}.\sin^\alpha\frac{B}{2}.\sin^\alpha\frac{C}{2}}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(\frac{1}{8})^\alpha}} = 3.2^\alpha$.

Vậy: $\frac{1}{\sin^\alpha\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^\alpha\frac{C}{2}} \ge 3.2^\alpha$.

Đặc biệt hóa *bài toán 3* bằng cách thay α bởi một giá trị cụ thể, sẽ thu được nhiều bất đẳng thức lượng giác mới. Thông qua mối liên hệ giữa các công thức lượng giác, HS có thể chứng minh được những bất đẳng thức lượng giác khác. Trong quá trình dạy học không chỉ yêu cầu đi từ cái riêng đến cái chung (khái quát hoá) mà còn đòi hỏi người học phải đi từ cái chung đến cái riêng (đặc biệt hoá). Chẳng hạn, với *bài toán 3* trong trường hợp α = 2, ta có bất đẳng thức: $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} \ge 12$. Sử dụng các phép biến đổi: $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}} = 1 + \cot^2\frac{A}{2}$, $\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}} = 1 + \cot^2\frac{B}{2}$, $\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}} = 1 + \cot^2\frac{C}{2}$ ta được *bài toán 4:*

Bài toán 4: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\cot^2\frac{A}{2} + \cot^2\frac{B}{2} + \cot^2\frac{C}{2} \ge 9$.

Nếu khai thác *bài toán xuất phát* theo một hướng khác sẽ lại cho ta những kết quả sau:

Bài toán 5: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{8}$.

Hướng dẫn: - Nếu tam giác ABC có một góc tù thì hiển nhiên: $\cos A\cos B\cos C < 0 < \frac{1}{8}$; - Nếu

tam giác ABC có một góc vuông, giả sử góc A = 90° thì cosA = 0 và cosAcosBcosC = 0;
- Nếu tam giác ABC không có góc nào là góc tù, khi đó cosA, cosB, cosC > 0. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 giá trị dương cosA, cosB, cosC ta có: $3\sqrt[3]{\cos A.\cos B.\cos C} \le \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$.

GV hướng dẫn HS sử dụng kết quả *bài toán 5* và thay đổi giả thiết của *bài toán xuất phát* (chỉ áp dụng đối với những tam giác có ba góc đều là góc nhọn), HS có thể xây dựng được bài toán tổng quát sau:

Bài toán 6: Cho tam giác ABC có ba góc đều là góc nhọn. Chứng minh rằng: $\frac{1}{\cos^\alpha A} + \frac{1}{\cos^\alpha B} + \frac{1}{\cos^\alpha C} \ge 3.2^\alpha$, $\forall \alpha > 0$.

Hướng dẫn: Do tam giác ABC có ba góc đều nhọn nên $\frac{1}{\cos^\alpha A}, \frac{1}{\cos^\alpha B}, \frac{1}{\cos^\alpha C} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương:

$$\frac{1}{\cos^\alpha A} + \frac{1}{\cos^\alpha B} + \frac{1}{\cos^\alpha C} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(\cos A \cos B \cos C)^\alpha}}$$

Áp dụng kết quả của *bài toán 5*, khi đó:

$$\frac{1}{\cos^\alpha A} + \frac{1}{\cos^\alpha B} + \frac{1}{\cos^\alpha C} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(\cos A \cos B \cos C)^\alpha}} \ge \frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^\alpha}} = 3.2\alpha.$$

Đặc biệt hóa *bài toán 6,* người học sẽ thu được những kết quả mới. Trong các trường hợp đặc biệt, chẳng hạn, với α = 2, bất đẳng thức nhận được là: $\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} \ge 12$. Thực hiện phép biến đổi các biểu thức: $\frac{1}{\cos^2 A} = 1 + \tan^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 B} = 1 + \tan^2 B$; $\frac{1}{\cos^2 C} = 1 + \tan^2 C$ ta có *bài toán 7:*

Bài toán 7: Cho tam giác ABC có ba góc đều là góc nhọn. Chứng minh rằng:

$\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C \ge 9$.

Khái quát hóa bài toán này, ta có bài toán mới:

Bài toán 8: Cho tam giác ABC có ba góc đều là góc nhọn. Chứng minh rằng: Với mọi số tự nhiên n ≠ 0, ta luôn có:

Bằng phép khái quát hóa *bài toán 7,* ta được *bài toán 8.* Trong dạy học, khái quát hoá là thao tác TD nhằm phát hiện những quy luật phổ biến của một lớp đối tượng hoặc hiện tượng từ một hoặc một số các trường hợp riêng lẻ. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, kết luận từ khái quát hoá có thể thu được nhờ phép quy nạp. Biết vận dụng linh hoạt phép khái quát hóa trong học tập, sẽ giúp HS RLTD và óc sáng tạo một cách hiệu quả.

***

Như vậy, từ kết quả của một bài toán đơn giản, GV có thể hướng dẫn cho HS khai thác được nhiều bài toán thú vị mà việc chứng minh những bài toán đó có thể dựa trên kết quả của bài toán ban đầu. Thông qua đó, HS được rèn luyện các thao tác TD và phát triển năng lực trí tuệ, nâng cao hiệu quả dạy học. ❑

Tài liệu tham khảo

1. Võ Anh Dũng (tổng chủ biên) - Trần Đức Huyên (chủ biên). **Giải toán lượng giác 10**. NXB *Giáo dục*, H. 2009.
2. Nguyễn Bá Kim. **Phương pháp dạy học môn Toán**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2006.

Đổi mới phương pháp...

(Tiếp theo trang 44)

Ví dụ: Khi dạy học phần «*Ý nghĩa, nguyên nhân thắng lợi và kinh nghiệm của cuộc kháng chiến chống Mĩ, cứu nước*", bên cạnh việc sử dụng PPTT khái quát lại những thắng lợi to lớn dưới sự lãnh đạo tài tình của Đảng , GV nên hướng dẫn SV nghiên cứu tài liệu học tập để SV có thể tự mình đánh giá những thành tựu cũng như những hạn chế của quá trình đấu tranh thống nhất nước nhà, từ đó giúp SV tích cực, chủ động hơn trong việc tích lũy kiến thức.

3. Đổi mới PPDH là nhiệm vụ cụ thể, cấp bách đối với toàn ngành giáo dục và đối với từng GV. Đổi mới PPDH không có nghĩa là loại bỏ hoàn toàn các PPDH truyền thống, thay vào đó PPDH mới mà phải kế thừa phát triển mặt tích cực của các PP truyền thống, đồng thời học hỏi, vận dụng một số PPDH mới phù hợp với điều kiện, hoàn cảnh và đặc điểm môn học, lớp học, người dạy, người học ở những môi trường dạy học cụ thể.❑

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Duy Bắc. **Một số vấn đề lí luận và thực tiễn dạy học môn học Mác - Lê nin và tư tưởng Hồ Chí Minh trong trường đại học**. NXB *Chính trị quốc gia*, H. 2004.
2. Phan Ngọc Liên - Trịnh Đình Tùng - Nguyễn Thị Côi. **Phương pháp dạy học lịch sử**, tập 1,2. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2002.
3. Nguyễn Cảnh Toàn. **Học và dạy cách học**. NXB *Đại học sư phạm*, H. 2002.
4. Kỉ yếu Hội thảo khoa học "*Đổi mới phương pháp dạy học và phương pháp đánh giá đối với giáo dục phổ thông, cao đẳng và đại học sư phạm*". H, 11/2006.
5. I.F. Kharlamov. **Phát huy tính tích cực học tập của học sinh như thế nào**. NXB *Giáo dục*, H. 1978.