VẬN DỤNG THUẬT TOÁN EUCLID ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ TỐI GIẢN

ThS. TRẦN QUỐC VIỆT*

Abstract: *In the curriculum of primary school teachers of Gather subjects, students get acquainted with the Euclidean algorithm and apply this algorithm to the problem of finding the greatest common divisor of the number. The article introduces some interesting applications of algorithms to some problem of irreducible fraction.*

Keywords: *greatest common divisor, elementary teacher education, Euclidean algorithm.*

Trong chương trình đào tạo giáo viên tiểu học môn *Tập hợp số*, sinh viên được làm quen với thuật toán Euclid và vận dụng thuật toán này vào các bài toán về tìm ước chung lớn nhất (ƯCLN) của các số. Bài viết giới thiệu một số ứng dụng của thuật toán vào giải các bài toán về phân số tối giản.

1. Một số kiến thức cơ bản về ƯCLN và thuật toán Euclid

1.1. Ước chung lớn nhất

Định nghĩa 1: Số nguyên dương d được gọi là ƯCLN của n số nguyên $a_1, a_2,..., a_n$, nếu d là ước của $a_1, a_2,..., a_n$; nếu e là một ước khác của chúng thì $e|d$.

Kí hiệu: d = ƯCLN $(a_1, a_2,..., a_n)$ hoặc $d = (a_1, a_2,..., a_n)$.

Định nghĩa 2: Nếu ước chung lớn nhất của $a_1, a_2,..., a_n$ bằng 1 thì chúng được gọi là các số nguyên tố cùng nhau.

Bổ đề (cơ sở của thuật toán Euclid): Nếu $a = bq + r$ thì $(a, b) = (b, r)$.

1.2. Thuật toán Euclid: Cho hai số nguyên a, b khác 0. Chia a cho b ta được thương là q_1 và số dư r_1. Chia b cho r_1, ta được thương là q_2 và số dư r_2. Tiếp tục quá trình này, ta được dãy các số tự nhiên giảm dần đến 0: $|b|, r_1, r_2...$ Vì vậy, thuật toán sẽ kết thúc sau hữu hạn bước, nghĩa là tồn tại một số tự nhiên n để dư $r_{n+1} = 0$. Từ đó, với bổ đề ở trên ta được: $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = ... = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Ví dụ: Tìm ƯCLN của 329 và 182.

Ta có: $329 = 1 \times 182 + 147$; $182 = 1 \times 147 + 35$; $147 = 4 \times 35 + 7$; $35 = 7 \times 5$.

Vậy $(329, 182) = (182, 147) = (147, 35) = (35, 7) = 7$.

2. Vận dụng thuật toán Euclid vào giải một số bài toán về phân số tối giản

2.1. Một số ví dụ

Như chúng ta đã biết, phân số $\frac{a}{b}$ tối giản khi a và b không cùng chia hết cho một số tự nhiên nào lớn hơn 1, hay $\frac{a}{b}$ tối giản $\Leftrightarrow (a, b) = 1$. Vận dụng điều kiện này và thuật toán Euclid để giải các ví dụ sau:

Ví dụ 1: Rút gọn các phân số sau: a) $\frac{329}{182}$; b) $\frac{633}{102}$.

Hướng dẫn:

Ta sử dụng thuật toán để tìm ƯCLN, sau đó, chia cả tử và mẫu cho ƯCLN sẽ được phân số tối giản.

a) Với phân số: $\frac{329}{182}$, ta có: $(329, 182) = (182, 147) = (147, 35) = (35, 7) = 7$.

Hay: $\frac{329}{182} = \frac{329:7}{182:7} = \frac{47}{26}$.

b) Với phân số $\frac{633}{102}$, ta có: $(633, 102) = (102, 21) = (21, 18) = (18, 3) = 3$.

Hay: $\frac{633}{102} = \frac{633:3}{102:3} = \frac{211}{34}$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng các phân số sau là tối giản với mọi số nguyên n: a) $\frac{21n+4}{14n+3}$; b) $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$.

Hướng dẫn

Để chứng minh, ta cần chỉ ra tử số và mẫu số của các phân số là nguyên tố cùng nhau.

a) Giả sử d là ước nguyên dương của 21n + 4 và 14n + 3. Ta có: $d|2 \times (21n + 4)$ và $d|3 \times (14n + 3)$.

* Khoa Giáo dục Tiểu học - Mầm non, Trường Cao đẳng Sư phạm Bắc Ninh

Khi đó: $d \mid [2(21n + 4) - 3(14n + 3)] = -1$. Suy ra: $d = 1$.

Vậy: phân số đã cho tối giản.

b) Giả sử d là ước nguyên dương của $2n + 1$ và $2n(n + 1)$.

Ta có: $d \mid [2n(n + 1) - n(2n + 1)] = n$. Suy ra: $d \mid (2n + 1)$ và $d \mid n$. Do đó $d \mid [2n + 1 - 2n] = 1$.

Vậy $d = 1$, hay phân số đã cho tối giản

Ví dụ 3: Tìm số tự nhiên n để các phân số sau tối giản: a) $\frac{n + 13}{n - 2}$; b) $\frac{18n + 3}{21n + 7}$.

Hướng dẫn

a) Ta có: $\frac{n + 13}{n - 2} = 1 + \frac{15}{n - 2}$

Phân số tối giản khi và chỉ khi $(15, n - 2) = 1 \Leftrightarrow (n - 2)$ không chia hết cho 5 và 3 hay $\begin{cases} n \neq 3k \\ n \neq 5k \end{cases}, k \in N$.

b) Ta có: $\frac{18n + 3}{21n + 7} = \frac{3(6n + 1)}{7(3n + 1)}$. Từ $(3, 7) = (3, 3n + 1) = (6n + 1, 3n + 1) = 1$, suy ra $\frac{18n + 3}{21n + 7}$ tối giản khi $(6n + 1, 7) = 1$.

Mặt khác: $6n + 1 = 7n - (n - 1)$ nên: $(6n + 1, 7) = 1 \Leftrightarrow (n - 1, 7) = 1 \Leftrightarrow n \neq 7k + 1$ với k là số tự nhiên.

2.2. Một số bài toán vận dụng

Bài tập 1: Chứng minh rằng các phân số sau là tối giản với mọi số nguyên n: a) $\frac{5n + 3}{13n + 8}$; b) $\frac{18n + 5}{11n + 3}$.

Bài tập 2: Tìm số tự nhiên n để các phân số sau tối giản: a) $\frac{n - 5}{n + 3}$; b) $\frac{2n + 3}{n + 7}$.

***

Thuật toán Euclid ở bậc đại học giúp sinh viên tính ƯCLN của 2 số một cách hiệu quả. Thuật toán này thường được vận dụng vào giải các bài toán về phân số tối giản và có có rất nhiều ứng dụng trong thực tiễn. ❑

Tài liệu tham khảo

Nguyễn Văn Nho. **Chuyên đề số học**. NXB *Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh*, 2005.

Đọc *Xứ tuyết* của Y. KAWABATA...

(Tiếp theo trang 56)

ngữ, tính cách nhân vật còn được bộc lộ qua cử chỉ, hành động. Đó là những kí hiệu phi ngôn ngữ nhưng lại có tác dụng chuyển tải nhiều ý nghĩa sâu sắc về tâm trạng, suy nghĩ, trạng thái cảm xúc và tính cách của nhân vật. Trong ***Xứ tuyết***, tình yêu Komako dành cho Shimamura được thể hiện rất rõ qua hành động, cử chỉ, ánh mắt, những thay đổi nhỏ trên gương mặt của nàng. Lần thứ hai gặp lại Shimamura, niềm hạnh phúc dâng trào trong trái tim Komako khiến nàng không ngừng có những hành động thắm thiết, nàng xiết *chặt bàn tay* Shimamura và *chỉ buông tay anh khi hai người đã đến giữa căn phòng* rồi lại *âu yếm dùng cả hai bàn tay Shimamura áp vào má cô rất dịu dàng*. Hành động Komako *ôm lấy anh, xiết chặt anh vào người* rồi lại *tức giận với cánh tay của chính cô vì nói đã không làm điều cô muốn, cô chửi rủa và cắn nó một cách độc ác* thể hiện tình cảm và bản năng mạnh mẽ của một trái tim yêu say đắm, hết mình.

Lại có lúc nằm trong vòng tay Shimamura, *"cô điên cuồng cắn lấy cắn để tay áo như còn cố đấu tranh chống lại niềm hạnh phúc, cố chối bỏ niềm sung sướng lớn lao"* (2; tr 245). Rồi cô khóc, đôi mắt đẫm lệ, rồi tiếng nức nở dịu dần, ở bên cạnh người yêu, đối với Komako là niềm hạnh lớn lao đến mức nàng không dám tin vào sự thật đó, nàng vừa muốn đẩy chàng ra xa vừa khao khát được đắm say trong tình yêu đó mãi mãi. Những hành động của Komako thể hiện mâu thuẫn trong nội tâm đồng thời cũng nói lên bi kịch tình yêu của cô.

Với nghệ thuật khai thác tâm lí nhân vật tinh tế và sâu sắc, Kawabata đã khắc họa thành công hình tượng Komako - nàng geisha xứ núi mang trong mình vẻ đẹp trong sáng, thánh thiện và ngời sáng như tuyết. Tình yêu của nàng với người lữ khách Shimamura cũng là một vẻ đẹp rực rỡ hình thành trong tuyết và tan đi như tuyết. Với tâm hồn nhạy cảm tinh tế, tư duy thâm trầm sâu sắc kết hợp với sự mạnh mẽ, táo bạo của tính cách hiện đại, Kawabata đã khắc họa được một Komako nồng nhiệt trong tình yêu, táo bạo trong hành động nhưng cũng rất tự trọng, tự tin và khao khát thể hiện giá trị con người mình. Bởi vậy, ***Xứ tuyết*** là nơi lưu lại những vẻ đẹp mong manh hư ảo không chỉ của thiên nhiên mà còn của con người, của tình yêu, của những trái tim biết quý trọng những gì thuộc về con người. ❑

(1) Đào Thị Thu Hằng. *"Nghệ thuật kể chuyện trong tác phẩm của Yasunary Kawabata"*. Luận án Tiến sĩ Ngữ văn. Bộ GD-ĐT, Viện Khoa học xã hội Việt Nam, Viện Văn học, 2006.

(2) Yashunari Kawabata. **Tuyển tập tác phẩm**. NXB *Lao động*, H. 2003.