XÂY DỰNG BÀI TOÁN NHẬN DẠNG TAM GIÁC VUÔNG BẰNG PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA Ở TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

LẠI VĂN ĐỊNH*

Ngày nhận bài: 15/04/2017; ngày sửa chữa: 26/04/2017; ngày duyệt đăng: 26/04/2017.

Abstract: *In exam questions of tests for talented students, problems of identifying triangle made up huge proportion. In this article, author introduces methods of designing problems of identifying square triangle through cubic equation at high school. These problems can be seen as a reference for teachers in teaching algebra and trigonometry at high school.*

Keywords: *Square triangles, cubic equations, identification, high school.*

1. Mở đầu

Trong chương trình toán học bậc trung học phổ thông, các bài toán (BT) về nhận dạng tam giác đã được giảm tải nhiều năm nay. Tuy vậy, trong các đề thi học sinh giỏi, các BT về nhận dạng tam giác vẫn đóng vai trò quan trọng. Bài viết giới thiệu cách xây dựng BT về nhận dạng tam giác vuông dựa vào phương trình bậc ba ở trung học phổ thông.

2. Nội dung

2.1. Cơ sở lí thuyết

Định lí 1. Giả sử phương trình bậc ba $x^3+ax^2+bx+c=0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thì các nghiệm của phương trình thỏa mãn các tính chất sau:

1) $T_1=x_1+x_2+x_3=-a$; 2) $T_2=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=b$; 3) $T_3=x_1x_2x_3=-c$

4) $T_4=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-\frac{b}{c}$; 5) $T_5=x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-2b$;

6) $T_6=(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_3)=-ab+c$; 7) $T_7=\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=\frac{a}{c}$

8) $T_8=\frac{x_1+x_2}{x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_2}=\frac{ab}{c}-3$; 9) $T_9=\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{b^2-2ac}{c^2}$

10) $T_{10}=x_1^3+x_2^3+x_3^3=-a^3+3ab-3c$

11) $T_{11}=(x_1+x_2-x_3)(x_2+x_3-x_1)(x_1+x_3-x_2)=a^3-4ab+8c$

12) $T_{12}=x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2=b^2-2ac$; 13) $T_{13}=(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)=1-a+b-c$

14) $T_{14}=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=1+a+b+c$; 15) $T_{15}=\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_3}{x_2x_1}=\frac{2b-a^2}{c}$

Định lí 2. Cho tam giác *ABC* với các cạnh *BC, CA, AB* có độ dài tương ứng là *a, b, c*. Kí hiệu *p, R, r* lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp; *S* là diện tích tam giác. Khi đó *a, b, c* là ba nghiệm của phương trình:

$$-2pt^2+(p^2+r^2+4Rr)t-4pRr=0 \quad (*)$$

2.2. Xây dựng BT. Dựa vào một phương trình bậc ba có nghiệm, có hệ số chứa ba yếu tố cơ bản trong tam giác: *p, R, r* (có 3 cạnh là *a, b, c*), sử dụng định lí Viet về mối quan hệ giữa các nghiệm đó, ta xây dựng được rất nhiều hệ thức lượng giác trong tam giác. Sau khi có các hệ thức lượng giác, kết hợp với BT *"Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi P=2R+r"* ta lại xây dựng được nhiều BT nhận dạng tam giác vuông bằng cách thay thế yếu tố *p* trong các đẳng thức lượng giác bởi *2R+r* hoặc ngược lại. Theo cách này kết hợp với phương trình bậc ba có hệ số chứa ba yếu tố cơ bản *p, R, r* mà nghiệm là 3 yếu tố khác như: sin *A*, sin *B*, sin *C*; cos *A*, cos *B*, cos *C*; h_a, h_b, h_c... ta có thể xây dựng rất nhiều BT tương tự.

Sau đây là một số BT minh họa.

BT 1. Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi *P=2R+r*.

Chứng minh: Từ

Mặt khác, áp dụng tính chất 2 cho phương trình (*), ta có

Từ hai đẳng thức trên, suy ra:

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{2}-ab-bc-ca=4R^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{2}=4R^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+ \dots =$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos C\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)=0$$

$\Leftrightarrow \cos A=0$ hoặc $\cos B=0$ hoặc $\cos C=0$. Hay tam giác *ABC* là tam giác vuông.

BT 2: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi .

Chứng minh: Áp dụng tính chất 3 cho phương trình (*), ta có:

*** Trường Đại học Điều dưỡng Nam Định**

Thay vào đẳng thức, thu được:

$p\ r\quad abc\quad r\ p \Leftrightarrow 2p^2r = 4pRr + 2r^2p$

$\Leftrightarrow p = 2R + r$. Theo kết quả của BT 1, ta có *ABC* là tam giác vuông.

BT 3: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi $a + b + c = 4R + 2r$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 1 cho phương trình (*), ta có: $a + b + c = 2p$

Thay vào hệ thức, thu được

$2p = 4R + 2r \Leftrightarrow p = 2R + r$

Theo kết quả của BT 1, suy ra *ABC* là tam giác vuông.

BT 4. Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi $abc = 4Rr(2R + r)$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 3 cho phương trình (*), ta có: $abc = 4p\mathrm{Rr}$

Thay vào hệ thức, thu được:

$4pRr = 4Rr\ \ 2R + r \ \Leftrightarrow p = 2R + r$

Theo kết quả của BT 1, suy ra *ABC* là tam giác vuông.

BT 5: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $ab + bc + ca = 2p^2 - 4R^2$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 2 cho phương trình (*), ta có: $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$

Thay vào hệ thức, thu được:

$\Leftrightarrow 4R^2 + r^2 + 4Rr = p^2 \Leftrightarrow p^2 = (2R + r)^2 \Leftrightarrow p = 2R + r$. Theo kết quả của BT 1, suy ra *ABC* là tam giác vuông.

BT 6: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{p^2 - 2R^2}{2pRr} = \frac{p^2 - 2R^2}{2.S.R}$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 4 cho phương trình (*), ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr}$. Thay vào hệ thức, thu được: $\frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr} = \frac{p^2 - 2R^2}{2pRr} \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2\ \ p^2 - 2R^2$

$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2\left(p^2 - 2R^2\right) \Leftrightarrow 4R^2 + r^2 + 4Rr = p^2 \Leftrightarrow p^2 = (2R + r)^2 \Leftrightarrow p = 2R + r$.

Dựa trên kết quả của BT 1, ta có *ABC* là tam giác vuông.

BT 7: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 5 cho phương trình (*), ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 - 2\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$

Thay vào hệ thức, thu được: $2p^2 - 2r^2 - 8Rr = 8R^2$.

$\Leftrightarrow 4R^2 + r^2 + 4Rr = p^2 \Leftrightarrow p^2 = (2R + r)^2 \Leftrightarrow p = 2R + r$.

Theo kết quả của BT 1, suy ra *ABC* là tam giác vuông.

BT 8. Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $abc = 2p\ p\ + r\ + 4Rr\ - 4pRr$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 6 cho phương trình (*), ta có: $(a + b)(b + c)(c + a) = 2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) - 4pRr$

Thay vào hệ thức, thu được: $2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right) - 4pRr = 2p^2\ \ p + r$

$2p\ \ p^2 + r^2 + 4Rr\ - 4pRr = 2p^2(p + r) \Leftrightarrow 2p^3 + 2pr^2 + 4pRr = 2p^3 + 2p^2r$

$\Leftrightarrow p = 2R + r$. Theo kết quả của BT 1, ta có *ABC* là tam giác vuông.

BT 9. Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{1}{2R(p - 2R)}$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 7 cho phương trình (*), ta có: $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{2p}{4pRr}$.

Thay vào hệ thức, thu được: $\frac{2p}{4pRr} = \frac{1}{2R(p - 2R)}$ $\ \ pRr\quad R\ p\quad R$

$\Leftrightarrow p = 2R + r$.

Theo kết quả của BT 1, suy ra *ABC* là tam giác vuông.

BT 10: Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} = \frac{2R}{r} + \frac{r}{R} + 1$.

Chứng minh. Áp dụng tính chất 8 cho phương trình (*), ta có:

$$\frac{a + b}{c} + \frac{b + c}{a} + \frac{a + c}{b} = \frac{2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)}{4pRr} - 3$$

Thay vào hệ thức, thu được:

$$\frac{2p\left(p^2 + r^2 + 4Rr\right)}{4pRr} - 3 = \frac{2R}{r} + \frac{r}{R} + 1.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ ^2 + \ ^2 + 4}{2Rr} = \frac{2}{r} + \frac{}{R} + 4 \Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 4R^2 + 2r^2 + 8Rr$$

$\Leftrightarrow p\ \ r\ \ + 4Rr = 4R^2 + 2r^2 + 8Rr \Leftrightarrow p = 2R + r$

Theo kết quả của BT 1, ta có *ABC* là tam giác vuông.

BT 11. Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \left(\frac{p^2 - 2R^2}{2pRr}\right)^2 - \frac{1}{Rr}$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 9 cho phương trình (*), ta có: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2-16p^2Rr}{\left(4pRr\right)^2}$

Thay vào hệ thức, thu được:

$$\frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2-16p^2Rr}{\left(4pRr\right)^2}=\left(\frac{p^2-2R^2}{2pRr}\right)^2-\frac{1}{Rr}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2}{\left(4pRr\right)^2}=\left(\frac{p^2-2R^2}{2pRr}\right)^2 \Leftrightarrow \left(p^2+r^2+4Rr\right)^2=4\left(p^2-2R^2\right)^2$$

$p^2+r^2+4Rr=2p^2-4R^2 \Leftrightarrow p=2R+r$.

Theo kết quả của BT 1, suy ra ABC là tam giác vuông.

BT 12. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=4R^2-2Rr-2r^2$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 10 và tính chất 1 cho phương trình (*), ta có: $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=$

$$\frac{a \quad b \quad c}{a \quad b \quad c}=\frac{-(-2p)^3+3(-2p)\left(p^2+r^2+4Rr\right)-3(-4pRr)}{2p}=p^2-3r^2-6Rr$$

Thay vào hệ thức, thu được

$$-3r^2-6Rr=4R^2-2Rr-2r^2 \Rightarrow p^2=4R^2+r^2+4Rr \Leftrightarrow p=2R+r.$$

Theo kết quả của BT 1, suy ra ABC là tam giác vuông.

BT 13. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $(p-a)(p-b)(p-c)=2Rr^2+r^3$.

Chứng minh: Đẳng thức tương đương với $(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=16Rr^2+8r^3$.

Áp dụng tính chất 11 cho phương trình (*), ta có:

$$(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=(-2p)^3-4(-2p)\left(p^2+r^2+4Rr\right)+8(-4pRr)=8pr^2$$

Thay vào hệ thức, thu được: $8pr^2=2Rr^2+r^3 \Leftrightarrow p=2R+r$.

Sử dụng kết quả của BT 1, suy ra ABC là tam giác vuông.

BT 14. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(p^2+r^2\right)^2-16pR^2r$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 12 cho phương trình (*), ta có: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2-2.2p.4pRr$.

Thay vào hệ thức, thu được: $\left(p^2+r^2+4Rr\right)^2-2.2p.4pRr=\left(p^2+r^2\right)^2-16pR^2r$

$$\Leftrightarrow p^4+r^4+16R^2r^2+2p^2r^2+8p^2Rr+8Rr^3-16p^2Rr=p^4+r^4+2p^2r^2-16pR^2r$$

$$\Leftrightarrow 16R^2r^2-8p^2Rr+8Rr^3+16pR^2r=0 \Leftrightarrow 2Rr-p^2+r^2+2pR=0 \Leftrightarrow 2Rr+r^2=p^2-2pR$$

$$\Leftrightarrow 2Rr+r^2+R^2=p^2-2pR+R^2 \Leftrightarrow (R+r)^2=(p-R)^2$$

(Vì trường hợp $R+r=R-p \Leftrightarrow r=-p$ là vô lí).

Sử dụng kết quả của BT 1, ta có ABC là tam giác vuông.

BT 15. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $(1+a)(1+b)(1+c)=(1+2R)^2(1+2r)+2r^2(1+2R)$.

Chứng minh: Áp dụng tính chất 13 cho phương trình (*), ta có:

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+2p+p^2+r^2+4Rr+4pRr.$$

Thay vào hệ thức, thu được:

$$1+2p+p^2+r^2+4Rr+4pRr=(1+2R)^2(1+2r)+2r^2(1+2R)$$

$$\Leftrightarrow 1+2p+p^2+r^2+4Rr+4pRr=1+8Rr+2r+4R+4R^2+8R^2r+2r^2+4Rr^2$$

$$\Leftrightarrow (2R+r)^2+2(2R+r)+4Rr(2R+r)-p^2-4pRr-2p=0$$

$$\Leftrightarrow (2R+r-p)(2R+r+p)+2(2R+r-p)+4Rr(2R+r-p)=0$$

$$\Leftrightarrow (2R+r-p)(2R+r+p+2+4Rr)=0 \Leftrightarrow p=2R+r$$

Sử dụng kết quả của BT 1, ta có ABC là tam giác vuông.

BT 16: Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{p_c}{ab}=\frac{2R}{S}$.

Chứng minh: Ta có: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{2R}{pr}$. Áp dụng tính chất 15 cho phương trình (*), ta có:

$$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}=\frac{2\left(p^2+r^2+4Rr\right)-(2p)^2}{-4pRr}.$$

Thay vào hệ thức, thu được: $\frac{2\left(p^2+r^2+4Rr\right)-(2p)^2}{-4pRr}=\frac{2R}{pr}$

$$\Leftrightarrow p^2-r^2-4Rr=4R^2 \Leftrightarrow p^2=(2R+r)^2 \Leftrightarrow p=2R+r$$

Sử dụng kết quả của BT 1, ta có ABC là tam giác vuông.

Nhận xét: Vận dụng định lí sin trong tam giác, có thể phát triển thành nhiều BT khác liên quan tới các góc trong tam giác như sau:

1) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $m_a^2+m_b^2+m_c^2=6R^2$.

2) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $\frac{(a+b)c}{ab}+\frac{(b+c)a}{bc}+\frac{(a+c)b}{ac}=\frac{2R^2+Rr+r^2}{Rr}$.

3) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2R^2+3Rr+r^2}{4pRr}$.

4) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}=\frac{1}{2p^2r^2}$.

5) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $ab+bc+ca=4(R+r)^2-2r^2$.

6) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2R^2+4Rr+r^2}{2pRr}$.

7) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $(a+b)(b+c)(c+a)=4(2R+r)^2(R+r)$.

8) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $(1-a)(1-b)(1-c)=(1-2R)^2(1-2r)+2r^2(1-2R)$.

9) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $a\sin A+b\sin B+c\sin C=\dfrac{p^2-rp-2Rr}{R}$.

10) Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi: $a\sin B+b\sin C+c\sin A=\dfrac{2(R+r)^2-r^2}{R}$.

3. Kết luận

Qua quá trình nghiên cứu phát triển các BT về phương trình bậc ba và hệ thức lượng trong tam giác, chúng tôi thu được những kết quả cụ thể sau: 1) Vận dụng định lí Viet cho phương trình bậc ba với hệ số là các yếu tố trong tam giác, ta có một số hệ thức lượng giác về độ dài các yếu tố trong tam giác; 2) Nêu được cách xây dựng một hệ thức lượng giác mới; 3) Xây dựng được một lớp các BT nhận dạng tam giác vuông mà hệ thức là sự liên hệ giữa các yếu tố độ dài trong tam giác; 4) Kết hợp với phương trình bậc ba, với hệ số chứa ba yếu tố cơ bản p, R, r mà nghiệm là 3 yếu tố khác như $\sin A, \sin B, \sin C$; $\cos A, \cos B, \cos C$; h_a, h_b, h_c, ..., ta có thể xây dựng rất nhiều BT nhận dạng tam giác vuông khác.

Hi vọng rằng, cách thức xây dựng những BT nhận dạng tam giác vuông từ công cụ phương trình bậc ba nêu trên sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên trong dạy học Đại số và Lượng giác ở trường trung học phổ thông, góp phần phát triển tư duy sáng tạo và năng lực giải toán cho học sinh khá, giỏi. ❑

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải (2001). *Tuyển chọn các bài toán lượng giác*. NXB Giáo dục.
[2] Nguyễn Bá Kim (2009). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
[3] Tạ Duy Phượng (2006). *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*. NXB Giáo dục.
[4] Bernd Meier - Nguyễn Văn Cường (2014). *Lí luận dạy học hiện đại - Cơ sở đổi mới mục tiêu, nội dung và phương pháp dạy học*. NXB *Đại học Sư phạm*.
[5] G.Polya (2010). *Giải một bài toán như thế nào*? NXB Giáo dục.

Dạy học giải toán tổ hợp...

(Tiếp theo trang 180)

chia giải thưởng theo tỉ lệ 4:3, cũng có người cho rằng cần chia theo tỉ lệ 3:2 (với lập luận đội 1 thắng nhiều hơn 1 ván bằng 1/5 của 5 nên đội 1 nhận 1/5 giải, phần còn lại chia đôi cho mỗi người).

- GV đưa ra lời giải đúng: Nếu tiếp tục chơi thêm 2 ván "giả" nữa thì xác suất chiến thắng của đội 2 (nhận toàn bộ giải) là: $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ nên xác suất thắng cuộc của đội 1 là $\frac{3}{4}$. Vì vậy, cần chia giải thưởng theo tỉ lệ 3:1 là hợp lí nhất.

3. Kết luận

Áp dụng quy trình giải toán của G. Polya, bài viết đưa ra hai quy trình giải toán TH-XS ở trung học phổ thông, đó là giải toán bằng định nghĩa cổ điển của xác suất và áp dụng các quy tắc tính xác suất; bên cạnh đó, nêu ra một số sai lầm thường mắc phải của HS khi sử dụng kiến thức tổ hợp để giải toán xác suất.❑

Tài liệu tham khảo

[1] G.Polya (2010). *Giải một bài toán như thế nào*? NXB Giáo dục Việt Nam.
[2] Lê Thị Hoài Châu (2011). *Dạy học thống kê ở trường phổ thông và vấn đề nâng cao năng lực hiểu biết toán học sinh*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, số 25, tr 68-77.
[3] G.Polya (2010). *Toán học và những suy luận có lí*. NXB Giáo dục Việt Nam.
[4] G.Polya (2010). *Sáng tạo toán học*. NXB Giáo dục Việt Nam.
[5] Đoàn Quỳnh - Nguyễn Huy Đoan - Nguyễn Xuân Liêm - Nguyễn Khắc Minh - Đặng Hùng Thắng (2007). *Đại số và Giải tích 11*. NXB Giáo dục.

Học tập thông qua...

(Tiếp theo trang 184)

Hằng - Tưởng Duy Hải - Đào Thị Ngọc Minh. *Tổ chức hoạt động trải nghiệm sáng tạo trong nhà trường phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.
[3] Haury D (1993). *Teaching science through inquiry*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for science, mathematics, and Environmental Education (ED359048).
[4] Kolb, A - Kolb, D (2009). *The learning way: Meda - cognitive aspects of experiential learning*. Simulation Gaming. 40 (3), 297-327.
[5] Valentina Sharlanova (2004). *Experiential learning*. Trakia journal of sciences, Vol.2, No.4.
[6] Wurdinger, S.D - Carlson, J.A (2009). *Teaching for experiential learning: Five approaches that work*. Rowman & Littlefield Education.