DẠY HỌC GIẢI TOÁN TỔ HỢP - XÁC SUẤT LỚP 11 THEO QUAN ĐIỂM CỦA G.POLYA GÓP PHẦN PHÁT HUY TÍNH TÍCH CỰC, SÁNG TẠO CỦA HỌC SINH

NGUYỄN VĂN THÀ - NGUYỄN VIẾT DƯƠNG*

Ngày nhận bài: 20/04/2017; ngày sửa chữa: 03/05/2017; ngày duyệt đăng: 04/05/2017.

***Abstract**: To instruct students to give many ways to solve mathematics problems and avoid popular mistakes, the article proposes a process of solving mathematics problems under viewpoint of G.Polya in teaching probability - statistics grade 11. In addition, the article also provides some illustrations of the problems so that teachers and students can apply easily to improve quality of teaching mathematics at high school.*

***Keywords**: Probability, statistics.*

1. Đặt vấn đề

Đại hội Toán học thế giới Seoul ICM 2014 đã bàn về thành tựu và cơ hội ứng dụng Toán học ở các nước đang phát triển. Tại đây, tham luận *"Toán học là một trụ cột của phát triển kinh tế Hàn Quốc"* của Giáo sư KunMo Chung: *Trong nền kinh tế sáng tạo của thế kỉ XXI, con người với khả năng học kiến thức mới cần hơn là những người có kiến thức bách khoa. Toán học đặt ra những vấn đề mới cho tương lai, là nguồn lực của kinh tế sáng tạo. Công nghiệp càng tiến tới các công nghệ tiên tiến, càng cần thêm Toán học và như vậy, sự đóng góp của Toán học lại càng tăng lên.* Trong dự thảo chương trình giáo dục phổ thông tổng thể, Bộ GD-ĐT đã khẳng định, *Toán* là môn học bắt buộc ở tiểu học và trung học cơ sở (từ lớp 1 đến lớp 9), giúp học sinh (HS) nắm được một cách có hệ thống các khái niệm, nguyên lí, quy tắc toán học cần thiết, làm nền tảng cho quá trình học tập tiếp theo hoặc có thể sử dụng trong cuộc sống hàng ngày. Cấu trúc chương trình môn *Toán* ở tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông dựa trên sự phối hợp cả cấu trúc tuyến tính với cấu trúc đồng tâm xoáy ốc (đồng tâm, mở rộng và nâng cao dần), xoay quanh và tích hợp ba mạch kiến thức: Số và Đại số; Hình học và Đo lường; Tổ hợp và Xác suất.

Cội nguồn của tư tưởng dạy học tích hợp xuất phát từ tính chỉnh thể của khoa học. Dù được phân thành nhiều lĩnh vực khác nhau cho phù hợp với năng lực nhận thức của con người, song về bản chất, khoa học vốn dĩ là một chỉnh thể thống nhất và tồn tại độc lập với sự phân chia của con người. Khi mỗi sự vật, hiện tượng được nhìn nhận trong mối quan hệ hữu cơ với các sự vật, hiện tượng khác sẽ khơi dậy được cảm hứng tìm tòi, khám phá của người học. Vì vậy, khi dạy học giải các bài toán (BT) về Xác suất thống kê, cần xác lập được mối liên hệ chặt chẽ đến các kiến thức toán tổ hợp. Tổ hợp là một ngành toán học rời rạc, nghiên cứu về cấu hình kết hợp với các phần tử của một tập hợp hữu hạn. Các cấu hình đó gồm: Liệt kê, tổ hợp, chỉnh hợp và hoán vị các phần tử của một tập hợp hữu hạn. Các BT tổ hợp đòi hỏi người học phải hiểu chính xác mối quan hệ giữa các đối tượng mà khó diễn đạt chúng bằng lời, bằng công thức một cách đầy đủ.

Thực tiễn dạy học cho thấy, có khá nhiều người học không nắm được bản chất của khái niệm tổ hợp, dẫn tới không vận dụng được vào giải quyết các BT đơn giản trong sản xuất và đời sống. Nhiều HS chưa phân biệt được tường minh giữa các khái niệm tổ hợp, chỉnh hợp (chỉnh hợp có lặp lại và chỉnh hợp không lặp lại). Nhìn chung, giáo dục toán học ở các trường phổ thông hiện vẫn chú trọng truyền thụ kiến thức, hạn chế khâu rèn luyện kĩ năng thực hành, kĩ năng sống cũng như khả năng vận dụng kiến thức liên môn vào giải quyết tình huống thực tiễn. Để khắc phục tình trạng này, trong dạy học môn *Toán* nội dung Tổ hợp - Xác suất (TH-XS) ở lớp 11, chúng tôi đã vận dụng quan điểm của G.Polya, góp phần giúp HS nắm vững kiến thức và tự khám phá ra kiến thức mới. Bài viết đưa ra một phương án dạy học giải toán TH-XS theo quan điểm giải toán của G.Polya.

2. Nội dung

2.1. Toán TH-XS liên quan chặt chẽ đến toán tổ hợp. Xem xét lịch sử về sự ra đời của TH-XS, chúng tôi nhận thấy toán TH-XS liên quan chặt chẽ đến toán tổ hợp. Blaise Pascal và Pierre de Fermat là hai nhà

* Trường Trung học phổ thông Phùng Hưng - TP. Hồ Chí Minh

toán học đặt nền tảng cho lí thuyết xác suất hiện đại. Năm 1654, qua trao đổi thư từ, Blaise Pascal và Pierre de Fermat đã giải quyết một BT thú vị của lí thuyết trò chơi được tóm tắt như sau: *Vào một ngày nọ, Pascal và Fermat ngồi nói chuyện với nhau trong một quán cà phê ở Paris. Sau một ngày thảo luận căng thẳng về những vấn đề toán học, họ quyết định mỗi người sẽ bỏ ra 50 Francs để chơi trò chơi tung đồng xu và lấy tiền đi ăn tối. Nếu mặt ngửa xuất hiện, Fermat được 1 điểm, nếu mặt sấp xuất hiện, Pascal sẽ được 1 điểm. Ai nhận được 10 điểm thì trò chơi kết thúc và người đó sẽ nhận toàn bộ 100 Francs. Nhưng một điều bất ngờ đã xảy ra. Khi Fermat được 8 điểm và Pascal được 7 điểm thì Fermat nhận được tin là có một người bạn của anh ấy ốm nặng. Người báo tin đồng ý sẽ đưa Fermat cùng về Toulouse nhưng với điều kiện Fermat phải về ngay lập tức. Khi Fermat trở lại Toulouse thì một vấn đề nảy sinh: Làm thế nào để chia số tiền 100 Francs?*

Trong một bức thư gửi Pascal sau này, Fermat đã nêu cách giải quyết như sau: *Tôi (Fermat) chỉ cần 2 điểm nữa là thắng cuộc chơi, trong khi đó bạn (Pascal) cần thêm 3 điểm, do vậy cần tung đồng xu tối đa thêm bốn lần nữa thì cuộc chơi sẽ kết thúc. Trong bốn lần tung này, nếu bạn không nhận được đủ 3 điểm, đồng nghĩa với việc tôi sẽ có thêm 2 điểm và sẽ dành chiến thắng. Nếu kí hiệu mặt ngửa bởi N và mặt sấp bởi S, thì có tất cả 16 kết quả có thể xảy ra sau đây:*

$NNNN$, $NNNS$, $NNSN$, $NSNN$, $SNNN$, $SSNN$, $NNSS$, $SNNS$, $NSSN$, $SNSN$, $NSNS$, $SSSN$, $SSNS$, $SNSS$, $NSSS$, $SSSS$.

Vì trong 16 kết quả trên, có 11 kết quả thuận lợi cho tôi. Do đó, 100 Francs cần được chia theo tỉ lệ 11:5 nghiêng về phía tôi, nghĩa là tôi sẽ nhận (11/16).100 = 68,75 Francs và bạn sẽ nhận 31,25 Francs.

Pascal rất hài lòng với cách giải quyết của Fermat. Tuy nhiên, Pascal nhận thấy phương pháp liệt kê tất cả các trường hợp có thể xảy ra của Fermat tương đối phức tạp đối với BT tổng quát. Pascal đã giải thích như sau: Trong lời giải của Fermat, ta nhận thấy nếu có hai hoặc nhiều hơn hai mặt ngửa xuất hiện thì Fermat sẽ thắng cuộc. Số các kết quả có hai mặt ngửa khi tung đồng xu bốn lần là C_4^2. Như vậy, số các trường hợp thuận lợi cho Fermat là $C_4^4 + C_4^3 + C_4^2 = C_4^0 + C_4^1 + C_4^2$. Đây chính là ba số hạng đầu tiên ở dòng thứ năm trong tam giác Pascal:

$$\begin{array}{c} C_0^0 \\ C_1^0 C_1^1 \\ C_2^0 C_2^1 C_2^2 \\ C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3 \\ C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4 \end{array}$$

Với BT tổng quát, khi người chơi thứ nhất và người chơi thứ hai lần lượt cần k và l điểm nữa để dành phần thắng, thì số tiền sẽ chia cho người thứ nhất theo tỉ lệ $r = \frac{x}{y}$, trong đó x là tổng số của l số hạng đầu tiên của dòng thứ ($k+l$) trong tam giác Pascal, còn y là tổng của tất cả các số hạng trong dòng đó:

$$r = \frac{C_{k+l-1}^0 + C_{k+l-1}^1 + C_{k+l-1}^2 + ... + C_{k+l-1}^l}{2^{k+l-1}}.$$

Trở lại trò chơi của Fermat và Pascal, có $k=2, l=3$, số tiền chia cho Fermat theo tỉ lệ: $\frac{C_4^0 + C_4^1 + C_4^2}{2^4}$.

Mặc dù các lập luận trên của Fermat và Pascal tương đối đơn giản, nhưng là một cuộc cách mạng vào những năm giữa thế kỉ XVII. Đó chính là cách định nghĩa xác suất theo quan điểm cổ điển. Khi một phép thử ngẫu nhiên có n kết quả đồng khả năng, trong đó có m kết quả thuận lợi cho sự kiện A, thì xác suất của biến cố A được định nghĩa: $P(A) = \frac{m}{n}$.

Ở BT chia điểm của Fermat và Pascal, có 16 kết quả đồng khả năng có thể xảy ra khi tung một đồng xu cân đối 4 lần, trong đó có 11 kết quả thuận lợi cho sự kiện A (sự kiện Fermat thắng cuộc). Vậy $P(A) = \frac{11}{16}$.

2.2. Quy trình giải toán của G.Polya

G.Polya là nhà sư phạm nổi tiếng người Mĩ với nhiều tác phẩm có tầm ảnh hưởng trên toàn thế giới. Nhiều cuốn sách của ông được dịch ra tiếng Việt ở nước ta như: *Sáng tạo toán học; Toán học và những suy luận có lí; Giải BT như thế nào?* Trong cuốn *Giải BT như thế nào?*, G.Polya [1] đã nêu ra quy trình bốn bước để giải một BT gồm:

Bước 1. Hiểu rõ BT: - Đâu là ẩn, đâu là dữ kiện? Điều kiện có đủ để xác định được ẩn hay không?; - Vẽ hình. Sử dụng các kí hiệu thích hợp; - Phân biệt các phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức hay không?

Bước 2. Xây dựng một chương trình: - Em đã gặp dạng toán này chưa?; - Xét kĩ yếu tố chưa biết (ẩn) và thử nhớ lại một BT quen thuộc cùng ẩn hay tương tự; - Có thể phát biểu BT theo cách khác không? - Nếu chưa giải được BT đã đề ra, em hãy thử giải BT có liên quan nhưng dễ hơn, BT tổng quát hơn hay một trường hợp riêng, tương tự; - Có thể thay đổi ẩn, dữ kiện, hay cả hai nếu cần, sao cho ẩn mới và các dữ kiện mới có mối liên hệ với nhau hơn; - HS đã sử dụng toàn bộ dữ kiện hay chưa? Đã chú ý đến tất cả các khái niệm trong BT chưa?

Bước 3. Thực hiện chương trình. Khi thực hiện chương trình, cần kiểm tra lại từng bước. HS cần trả lời các câu hỏi: *Mỗi bước đã đúng chưa?; Em có thể chứng minh là đúng không*?

Bước 4. Trở lại cách giải (nghiên cứu cách giải đã tìm ra): - Em có thể kiểm tra lại kết quả và toàn bộ quá trình giải BT hay không?; - Có thể tìm được kết quả theo cách khác không? - Em có thể sử dụng kết quả hay phương pháp đó cho một BT khác không?

Theo quan điểm của G.Polya, trong dạy và học toán cần vận dụng đa dạng các hình thức tổ chức và phương pháp dạy học; tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin; chú trọng thực hành, ứng dụng; gắn kết kiến thức được học với thực tiễn, liên môn; chú trọng phương pháp tự học, nghiên cứu khoa học.

2.3. Vận dụng quy trình giải toán của G.Polya vào giải toán TH-XS lớp 11

Vận dụng quy trình các bước giải toán của G.Polya, ta có các phương pháp giải sau:

2.3.1. Phương pháp giải áp dụng định nghĩa cổ điển của xác suất (phương pháp 1)

Bước 1. Xác định không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu (số khả năng xảy ra).

Bước 2. Xác định biến cố mà đề bài yêu cầu và tính số phần tử của tập hợp mô tả biến cố đang xét (số kết quả thuận lợi của biến cố đó).

Bước 3. Tính xác suất của biến cố bằng cách lấy số kết quả thuận lợi của biến cố chia cho số khả năng xảy ra: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Chú ý rằng, khi tính số phần tử của không gian mẫu và tập hợp mô tả biến cố, cần nắm vững kiến thức về tổ hợp (định nghĩa, tính chất và công thức tính của tổ hợp). Mặt khác, khi áp dụng định nghĩa cổ điển của xác suất, cần thỏa mãn hai điều kiện: Không gian mẫu chỉ có hữu hạn các phần tử (số phần tử đếm được); các kết quả của phép thử phải là đồng khả năng. Chẳng hạn, khi gieo súc sắc hoặc đồng tiền, cần cân đối đồng chất để khả năng xuất hiện các mặt là như nhau; khi chọn quả cầu trong hộp thì khả năng chọn mỗi quả là như nhau,... đó chính là tính đồng khả năng. Khi gieo con súc sắc, số lần gieo hữu hạn, số quả cầu trong hộp hữu hạn chính là tính hữu hạn của các phần tử của không gian mẫu.

2.3.2. Phương pháp giải áp dụng các quy tắc tính xác suất (phương pháp 2)

Bước 1. Đặt tên cho biến cố cần tính xác suất là A, các biến cố liên quan đến biến cố A là: $A_1; A_2;...A_n$ sao cho: - Biến cố A biểu diễn được theo các biến cố: $A_1; A_2;...A_n$; - Xác suất của các biến cố: $A_1; A_2;...A_n$ là tính được dễ hơn so với A; - Xác định được mối quan hệ giữa các biến cố $A_1; A_2;...A_n$.

Bước 2. Biểu diễn biến cố A theo các biến cố $A_1; A_2;...A_n$.

Bước 3. Xác định mối quan hệ giữa các biến cố và áp dụng quy tắc:

1) Nếu A_1, A_2 xung khắc thì $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$;

2) Nếu A_1, A_2 đối nhau thì $P(A_1)=1-P(A_2)$;

3) Nếu A_1, A_2 độc lập thì $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$.

3. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Trong một hộp có 5 bi đỏ, 6 bi đen. Lần lượt lấy ra 3 bi từ hộp. Tính xác suất để trong 3 bi lấy ra có 2 bi màu đỏ.

Giáo viên (GV) có thể hướng dẫn HS tìm ra hai cách giải BT, ứng với hai phương pháp giải vừa nêu ở trên.

Cách 1 (giải theo định nghĩa cổ điển của xác suất)

- Bước 1. Xác định không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu: Vì mỗi lượt bốc 3 bi từ một hộp có 5 bi đỏ và 6 bi đen tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 11 (một tập con 3 phần tử của tập hợp 11 phần tử) nên số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{11}^3=165$.

- Bước 2. Xác định biến cố mà đề bài yêu cầu và tính số kết quả thuận lợi của biến cố đó: Kí hiệu A là biến cố: *"Trong 3 bi lấy ra có 2 bi màu đỏ"*. Khi đó, do chỉ có 5 bi đỏ nên số cách chọn 2 bi đỏ là C_5^2. Tương tự, số cách chọn 1 bi đen là C_6^1. Do đó, theo quy tắc nhân ta có số kết quả thuận lợi xảy ra của biến cố A là $n(A)=C_5^2\times C_6^1=10\times 6=60$.

- Bước 3. Tính xác suất của biến cố A:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{60}{165}=\frac{4}{11}.$$

Cách 2 (giải theo quy tắc tính xác suất):

- Bước 1. Đặt tên cho biến cố cần tính xác suất và các biến cố liên quan: Gọi biến cố cần tính xác suất là A còn A_i là biến cố lấy được i bi màu đỏ, $i=1,2,3$.

- Bước 2: Biểu diễn biến cố A theo các biến cố $A_1; A_2; A_3$: $A=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

- Bước 3: Xác định mối quan hệ giữa các biến cố và áp dụng quy tắc tính xác suất: Vì các biến cố $A_1A_2\overline{A_3}$, $A_1\overline{A_2}A_3$, $\overline{A_1}A_2A_3$ là xung khắc, nên:

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})+P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3)+P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3)$$
$$=\frac{5}{11}.\frac{4}{10}.\frac{6}{9}+\frac{5}{11}.\frac{6}{10}.\frac{4}{9}+\frac{6}{11}.\frac{5}{10}.\frac{4}{9}=\frac{4}{11}.$$

Sau đó, GV cho HS so sánh hai lời giải và kết quả tính toán.

Ví dụ 2: Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa ba quả đỏ và hai quả xanh, hộp thứ hai chứa bốn quả đỏ và sáu quả xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp một quả. Tính xác suất sao cho lấy được hai quả khác màu.

Cách 1 (giải theo định nghĩa cổ điển của xác suất):

- Bước 1. Xác định không gian mẫu và tính số phần tử của không gian mẫu: Ta lấy ngẫu nhiên từ hộp thứ nhất 1 quả cầu trong 5 quả cầu, suy ra có cách lấy, tương tự với hộp thứ hai lấy ngẫu nhiên 1 quả cầu trong 10 quả cầu, ta có C_{10}^1 cách lấy. Vậy, số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_5^1 C_{10}^1 = 50$.

- Bước 2. Xác định biến cố mà đề bài yêu cầu và tính số phần tử của tập hợp mô tả biến cố đang xét (số kết quả thuận lợi của biến cố đó).

Kí hiệu A: "Hai quả lấy từ 2 hộp là khác màu". Có 2 khả năng lấy được hai quả khác màu: hộp 1 lấy được quả đỏ, hộp 2 lấy được quả xanh, số khả năng là: $C_3^1 C_6^1 = 18$; hộp 1 lấy được quả xanh, hộp 2 lấy được quả đỏ, số khả năng là: $C_2^1 C_4^1 = 8$.

Áp dụng quy tắc cộng, ta có: $n(A) = 26$.

- Bước 3. Tính xác suất của biến cố bằng cách lấy số kết quả thuận lợi xảy ra của biến cố chia cho số khả năng xảy ra: $P\left(A\right) = \dfrac{26}{50} = 0,52$.

Cách 2 (giải theo quy tắc tính xác suất):

- Bước 1. Đặt tên cho các biến cố: Kí hiệu A: "Biến cố lấy được từ hộp 1 quả màu đỏ"; kí hiệu B: "Biến cố lấy được từ hộp 2 quả màu đỏ"; kí hiệu C: "Biến cố lấy hai quả khác màu từ 2 hộp".

- Bước 2. Biểu diễn các biến cố theo các mối liên hệ. Ta có: $C = A\overline{B} \cup \overline{A}B$

- Bước 3. Xác định mối quan hệ giữa các biến cố và áp dụng quy tắc tính xác suất: A và B độc lập thì A và $\overline{B}$; $\overline{A}$ và B cũng độc lập; $A\overline{B}$ và $\overline{A}B$ xung khắc nên: $P(C) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) = \dfrac{3}{5}.\dfrac{6}{10} + \dfrac{2}{5}.\dfrac{4}{10} = 0,52$.

GV đưa ra nhận xét: Phương pháp giải 2 nêu trên thường được dùng trong giải toán. Chẳng hạn, chúng ta có thể áp dụng vào BT cùng dạng với ví dụ 1 sau:

Ví dụ 3: Có xạ thủ cùng bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích lần lượt là:0,6; 0,7; 0,8. Tính xác suất để có ít nhất một người bắn trúng bia?

GV yêu cầu HS dùng phương pháp giải 2 để giải toán.

HS giải như sau:

- Bước 1: Đặt tên cho các biến cố. Kí hiệu A: "Biến cố có ít nhất một người bắn trúng bia"; kí hiệu A_i: "Biến cố người thứ i bắn trúng bia", $i = 1,2,3$. Suy ra $\overline{A}$ là biến cố không có người nào bắn trúng bia.

- Bước 2. Biểu diễn biến cố theo các mối liên hệ: $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, suy ra $P(\overline{A}) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = 0,4.0,3.0,2 = 0,024$

Bước 3. Xác định mối quan hệ giữa các biến cố và áp dụng quy tắc tính xác suất: $P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 0,976$.

GV tiếp tục đưa ra nhận xét: Cũng như ví dụ 3 nhưng thay bằng câu hỏi:*"Ba xạ thủ bắn lần lượt cho đến khi trúng bia thì kết thúc. Tính xác suất để mục tiêu bị bắn trúng ở viên đạn thứ 5"* thì lời giải BT như thế nào?

Ví dụ 4: Có 3 xạ thủ bắn lần lượt cho đến khi trúng bia thì thôi. Xác suất trúng đích lần lượt là: 0,6; 0,7; 0,8. Tính xác suất để mục tiêu bị bắn trúng ở viên đạn thứ 5?

- GV gợi ý cho HS sử dụng phương pháp giải 2.

- HS làm như sau: Kí hiệu: A là "Biến cố mục tiêu bị bắn trúng ở viên đạn thứ 5". Ta có:

$$A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_1}A_2 \Rightarrow P\left(A\right) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})P(\overline{A_1})P(A_2)$$
$$= 0,4\,.0,3\,.\,0,2\,.\,0,4\,.\,0,7 = 0,00672$$

- GV tiếp tục đưa ra BT khai thác ví dụ 3 như sau:

Ví dụ 5: Có 1 xạ thủ bắn vào tấm bia. Xác suất trúng đích là 0,2. Tính xác suất để trong 3 lần bắn có: a) Ít nhất một lần bắn trúng bia?; b) Bắn trúng bia đúng 1 lần?

GV gợi ý cho HS sử dụng phương pháp giải 2.

a) Kí hiệu A: "Biến cố có ít nhất 1 lần bắn trúng bia". Ta có: $P\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_1}\,\overline{A_1}\right) = 0,8.0,8.0,8 = 0,512$, do đó: $P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 0,488$.

b) Kí hiệu A_i: "Biến cố người đó bắn trúng bia ở lần thứ i", $i = 1,2,3$.

A: "Biến cố trong 3 lần bắn, người bắn trúng bia 1 lần".

$A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, do đó $P\left(A\right) = 3.0,128 = 0,384$.

- GV đưa ra nhận xét: Có nhiều BT không giải được bằng định nghĩa cổ điển xác suất vì không tìm ra được số phần tử của không gian mẫu, chẳng hạn như ví dụ 3 ở trên. GV tiếp tục cho HS khắc sâu kiến thức về xác suất thông qua BT sau:

Ví dụ 6 (tương tự BT của Blaise Pascal và Pierre de Fermat): *Trường Trung học phổ thông Phùng Hưng có 2 đội bóng chuyền thi đấu. Họ thỏa thuận với nhau rằng đội nào đầu tiên thắng 5 séc thì được nhận toàn bộ giải thưởng. Đang thi đấu thì trời mưa nên trận đấu phải dừng lại khi đội thứ nhất thắng 4 ván, đội thứ hai thắng 3 ván. Vậy, cần chia giải thế nào cho hợp lí?*

- GV nêu ra các sai lầm thường gặp giúp HS khắc sâu kiến thức về TH-XS: Nhiều người cho rằng cần

(Xem tiếp trang 176)

7) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $(a+b)(b+c)(c+a)=4(2R+r)^2(R+r)$.

8) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $(1-a)(1-b)(1-c)=(1-2R)^2(1-2r)+2r^2(1-2R)$.

9) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $a\sin A+b\sin B+c\sin C=\dfrac{p^2-rp-2Rr}{R}$.

10) Chứng minh rằng tam giác *ABC* vuông khi và chỉ khi: $a\sin B+b\sin C+c\sin A=\dfrac{2(R+r)^2-r^2}{R}$.

3. Kết luận

Qua quá trình nghiên cứu phát triển các BT về phương trình bậc ba và hệ thức lượng trong tam giác, chúng tôi thu được những kết quả cụ thể sau: 1) Vận dụng định lí Viet cho phương trình bậc ba với hệ số là các yếu tố trong tam giác, ta có một số hệ thức lượng giác về độ dài các yếu tố trong tam giác; 2) Nêu được cách xây dựng một hệ thức lượng giác mới; 3) Xây dựng được một lớp các BT nhận dạng tam giác vuông mà hệ thức là sự liên hệ giữa các yếu tố độ dài trong tam giác; 4) Kết hợp với phương trình bậc ba, với hệ số chứa ba yếu tố cơ bản *p, R, r* mà nghiệm là 3 yếu tố khác như $\sin A,\sin B,\sin C$; $\cos A,\cos B,\cos C$; h_a,h_b,h_c, ..., ta có thể xây dựng rất nhiều BT nhận dạng tam giác vuông khác.

Hi vọng rằng, cách thức xây dựng những BT nhận dạng tam giác vuông từ công cụ phương trình bậc ba nêu trên sẽ là tài liệu tham khảo bổ ích cho giáo viên trong dạy học Đại số và Lượng giác ở trường trung học phổ thông, góp phần phát triển tư duy sáng tạo và năng lực giải toán cho học sinh khá, giỏi. ❑

Tài liệu tham khảo

[1] Phan Huy Khải (2001). *Tuyển chọn các bài toán lượng giác*. NXB Giáo dục.

[2] Nguyễn Bá Kim (2009). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.

[3] Tạ Duy Phượng (2006). *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*. NXB Giáo dục.

[4] Bernd Meier - Nguyễn Văn Cường (2014). *Lí luận dạy học hiện đại - Cơ sở đổi mới mục tiêu, nội dung và phương pháp dạy học*. NXB *Đại học Sư phạm.*

[5] G.Polya (2010). *Giải một bài toán như thế nào*? NXB Giáo dục.

Dạy học giải toán tổ hợp...

(Tiếp theo trang 180)

chia giải thưởng theo tỉ lệ 4:3, cũng có người cho rằng cần chia theo tỉ lệ 3:2 (với lập luận đội 1 thắng nhiều hơn 1 ván bằng 1/5 của 5 nên đội 1 nhận 1/5 giải, phần còn lại chia đôi cho mỗi người).

- GV đưa ra lời giải đúng: Nếu tiếp tục chơi thêm 2 ván "giả" nữa thì xác suất chiến thắng của đội 2 (nhận toàn bộ giải) là: $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ nên xác suất thắng cuộc của đội 1 là $\frac{3}{4}$. Vì vậy, cần chia giải thưởng theo tỉ lệ 3:1 là hợp lí nhất.

3. Kết luận

Áp dụng quy trình giải toán của G. Polya, bài viết đưa ra hai quy trình giải toán TH-XS ở trung học phổ thông, đó là giải toán bằng định nghĩa cổ điển của xác suất và áp dụng các quy tắc tính xác suất; bên cạnh đó, nêu ra một số sai lầm thường mắc phải của HS khi sử dụng kiến thức tổ hợp để giải toán xác suất.❑

Tài liệu tham khảo

[1] G.Polya (2010). *Giải một bài toán như thế nào*? NXB Giáo dục Việt Nam.

[2] Lê Thị Hoài Châu (2011). *Dạy học thống kê ở trường phổ thông và vấn đề nâng cao năng lực hiểu biết toán học sinh*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, số 25, tr 68-77.

[3] G.Polya (2010). *Toán học và những suy luận có lí*. NXB Giáo dục Việt Nam.

[4] G.Polya (2010). *Sáng tạo toán học*. NXB Giáo dục Việt Nam.

[5] Đoàn Quỳnh - Nguyễn Huy Đoan - Nguyễn Xuân Liêm - Nguyễn Khắc Minh - Đặng Hùng Thắng (2007). *Đại số và Giải tích 11*. NXB Giáo dục.

Học tập thông qua...

(Tiếp theo trang 184)

Hằng - Tưởng Duy Hải - Đào Thị Ngọc Minh. *Tổ chức hoạt động trải nghiệm sáng tạo trong nhà trường phổ thông*. NXB Giáo dục Việt Nam.

[3] Haury D (1993). *Teaching science through inquiry*. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for science, mathematics, and Environmental Education (ED359048).

[4] Kolb, A - Kolb, D (2009). *The learning way: Meda - cognitive aspects of experiential learning*. Simulation Gaming. 40 (3), 297-327.

[5] Valentina Sharlanova (2004). *Experiential learning*. Trakia journal of sciences, Vol.2, No.4.

[6] Wurdinger, S.D - Carlson, J.A (2009). *Teaching for experiential learning: Five approaches that work*. Rowman & Littlefield Education.