

# PHÁT TRIỂN VĂN HÓA TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

ĐỖ THỊ LAN ANH\*

Ngày nhận bài: 07/06/2016; ngày sửa chữa: 13/06/2016; ngày duyệt đăng: 15/06/2016.

**Abstract:** Teaching mathematics not only provides knowledge to solve problems or do exercises but also trains mathematic thinking capacity for students. The article mentions development of thinking capacity called "mathematical culture" for students in term of definition, methods to develop this competence for students.

**Keywords:** Mathematic thinking capacity, "mathematic culture".

## 1. Văn hóa toán học

Văn hoá toán học bao gồm tất cả những phẩm chất và năng lực đã hình thành bền vững qua việc học tập và nghiên cứu toán học, độ bền vững đạt đến mức dù cho có quên hết kiến thức toán học thì những phẩm chất và năng lực ấy vẫn còn [1; tr 6]. Yếu tố cốt lõi của văn hóa toán học chính là tư duy toán học, là nhân cách của con người nói chung, của người làm toán và học toán nói riêng. Đó chính là khả năng suy luận có lí, suy luận ngoại suy, tư duy biện chứng, khái quát hóa, tương tự hóa, đặc biệt hóa,... một vấn đề nào đó khi chứng minh định lí hay giải bài tập toán. Văn hóa toán học cùng với các thành tố trên, liên quan đến hệ thống giá trị và năng lực của mỗi người, giúp họ nâng cao chất lượng cuộc sống.

Hiện nay, quan điểm về dạy học môn Toán đã có nhiều thay đổi, nhưng còn nặng về trang bị những tri thức toán học và rèn luyện kĩ năng giải toán. Việc dạy "tư duy" và rèn "nhân cách" - hai yếu tố cốt lõi của văn hóa toán học, chưa được quan tâm đúng mức. Vì vậy, hình thành và phát triển văn hóa toán học cho học sinh (HS) ở trường trung học phổ thông (THPT) là một vấn đề rất đáng quan tâm nghiên cứu.

## 2. Phát triển văn hoá toán học ở trường THPT

### 2.1. Đặc điểm của sự hình thành văn hoá toán học

Văn hoá toán học được hình thành theo kiểu "lắng đọng phù sa". Mỗi lần HS cố gắng khắc phục bệnh lười suy nghĩ để năng động tư duy là một lần họ có thêm một sự tiến bộ về tư duy và nhân cách, dù đó chỉ là một sự tiến bộ nhỏ xíu như hạt cát, nhưng lâu ngày thì những hạt cát nhỏ sẽ tạo thành bãi phù sa. Muốn HS có nhiều cơ hội phát triển tư duy và rèn nhân cách, giáo viên (GV) có thể và cần thiết phải tổ chức cho HS vận dụng linh hoạt các thao tác tư duy toán học vào thực tiễn học tập sinh động của họ, trên lớp hay ở nhà,

để hình thành cho họ thói quen tư duy, giải quyết vấn đề một cách logic, khoa học, góp phần hình thành nhân cách.

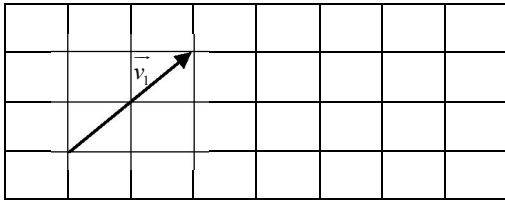
Văn hoá toán học được hình thành và bồi đắp trong quá trình HS chiếm lĩnh các kiến thức toán học trong nhà trường. Học toán trong nhà trường phổ thông không chỉ dừng lại ở việc học định lí, công thức, phương pháp thuần túy mang tính lí thuyết, cũng không chỉ tiếp cận cách thức xây dựng toán học với tư duy logic và ngôn ngữ toán. Mục đích trong quá trình học toán phải đạt tới là phải hiểu được nguồn gốc thực tiễn của toán học và nâng cao khả năng ứng dụng, hình thành thói quen tư duy (đặc trưng của môn Toán) và vận dụng toán học vào cuộc sống. Đây chính là thành phần quan trọng của vốn văn hóa toán học trong mỗi con người.

### 2.2. Một số biện pháp phát triển văn hoá toán học cho HS THPT

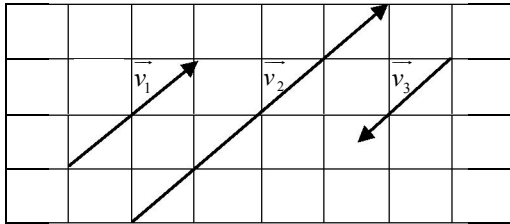
2.2.1. Tổ chức cho HS được tập luyện hoạt động khái quát hoá trong khi dạy một số khái niệm toán học theo con đường quy nạp. Chẳng hạn, khi dạy định nghĩa phép nhân vectơ với một số, ta có thể tiến hành như sau.

GV: Tổ chức cho HS thực hiện yêu cầu trong phiếu học tập, có thể hoạt động độc lập hay theo nhóm nhỏ. Xét bài toán sau đây: "Cho 3 chất điểm chuyển động đều. Chất điểm thứ nhất có vận tốc  $\vec{v}_1$  (hình 1). Chất điểm thứ hai chuyển động cùng chiều với chất điểm thứ nhất và có vận tốc  $\vec{v}_2$  gấp đôi vận tốc  $\vec{v}_1$ . Chất điểm thứ ba chuyển động ngược chiều với chất điểm thứ nhất và có vận tốc  $\vec{v}_3$  bằng  $\frac{2}{3}$  vận tốc  $\vec{v}_1$ . Trên hình 1, hãy vẽ hai vectơ vận tốc  $\vec{v}_2, \vec{v}_3$ .

\* Trường Trung học phổ thông Đông Du, Đắk Lắk



Hình 1  
HS: Làm việc độc lập, sau đó trao đổi với nhau theo từng cặp. Kết quả mong đợi như sau:



Hình 2

GV: Hãy nêu đặc điểm của  $\vec{v}_2$  và  $\vec{v}_3$  (so với)  $\vec{v}_1$

HS: Nhận xét:  $\vec{v}_2$  cùng hướng với  $\vec{v}_1$  và có độ dài gấp đôi độ dài  $\vec{v}_1$ ;  $\vec{v}_3$  ngược hướng với  $\vec{v}_1$  và có độ dài bằng  $\frac{2}{3}$  độ dài  $\vec{v}_1$ .

GV: Vectơ  $\vec{v}_2$  gọi là tích của vectơ  $\vec{v}_1$  với số 2, kí hiệu  $2\vec{v}_1$ ; vectơ  $\vec{v}_3$  gọi là tích của vectơ  $\vec{v}_1$  với số  $-\frac{2}{3}$ , kí hiệu  $\left(-\frac{2}{3}\right)\vec{v}_1$ . Tương tự như vậy,  $\vec{v}_2$  là tích của  $\vec{v}_3$  với số nào và kí hiệu như thế nào?

HS:  $\vec{v}_2$  là tích của  $\vec{v}_3$  với số  $-3$ , kí hiệu  $(-3)\vec{v}_3$ .

GV: Một cách tổng quát: Tích của vectơ  $\vec{a}$  với một số thực  $k$  là một vectơ được xác định như thế nào?

HS: Làm việc theo cặp, đưa ra kết quả mong đợi:  $k\vec{a}$ : cùng hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ ; ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$ .

GV: Yêu cầu một vài HS đọc định nghĩa trong sách giáo khoa và đưa ra nhận xét về một số trường hợp đặc biệt về phép nhân vectơ với một số thực:  $0\vec{a} = \vec{0}$  với mọi  $\vec{a}$ ;  $k\vec{0} = \vec{0}$  với mọi  $k$ ;  $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

2.2.2. Rèn luyện cho HS các hoạt động khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự khi dạy học định lí, giải toán. Chẳng hạn, xét bài toán: “Cho  $a, b > 0$  và bất đẳng thức  $a^3 + b^3 \geq a^2b + b^2a$  (1). a) Hãy chứng minh (1); b) Hãy phát biểu những bất đẳng thức tương tự

(1); c) Hãy khái quát hóa bất đẳng thức (1)”. Khi đó, GV có thể hướng dẫn HS giải và khái quát hoá bài toán theo các hướng sau:

a) Cách 1. Ta có

$$a^3 + b^3 - a^2b - b^2a = a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \quad \forall a, b > 0$$

(đpcm)

Cách 2. Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$a^3 + a^3 + b^3 \geq 3\sqrt[3]{a^6b^3} = 3a^2b \Leftrightarrow 2a^3 + b^3 \geq 3a^2b.$$

Tương tự:

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được đpcm.

b) +) Nhìn theo góc độ số mũ của hai vế của bất đẳng thức (1): Xét riêng  $a^3$  và  $a^2b$  ta thấy trong số hạng  $a^3$  số mũ của  $a$  là 3, trong số hạng  $a^2b$  thì số mũ của  $a$  là 2, số mũ của  $b$  là 1. Như vậy số mũ của  $a$  đã giảm đi 1 đơn vị nhưng tổng số mũ của  $a$  và  $b$  trong số hạng  $a^2b$  bằng số mũ của  $a$  trong  $a^3$ . Từ đó ta có

**Bài toán 1:** Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh rằng:

i)  $a^4 + b^4 \geq a^3b + b^3a$  ii)  $a^5 + b^5 \geq a^4b + b^4a$ .

+ ) Nếu nhìn về số biến số trong bất đẳng thức

(các bài toán trên chỉ áp dụng cho 2 biến) ta có thể xét tương tự cho 3 biến, 4 biến, ... và có **Bài toán 2:**

Cho  $a, b, c > 0$ , chứng minh rằng:

i)  $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

ii)

c) Tiếp đó, mở rộng Bài toán 1 ta được **Bài toán 3:**

Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^n + b^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}a \quad (n \in \mathbb{N}^*) \text{ hoặc } \mathbf{Bài toán 4:}$$

Cho  $a, b > 0$ . Chứng minh rằng:

$$a^n + b^n \geq a^m b^{n-m} + b^m a^{n-m} \quad (m, n \in \mathbb{N}, n \geq m).$$

Nếu mở rộng từ Bài toán 2, ta có **Bài toán 5:** Cho

$n$  số dương,  $m, k \in \mathbb{N}, m \geq k$ . Chứng minh rằng:

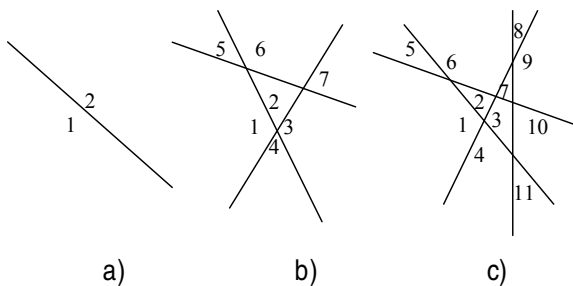
Bằng những cách làm đó ta có thể hướng HS độc lập suy nghĩ để không ngừng rèn luyện trí thông minh và sự sáng tạo, rèn luyện thói quen tư duy tương tự, khái quát hoá.

2.2.3. Rèn luyện cho HS sử dụng những suy luận có lí, được tập luyện mò mẫm, dự đoán để phát hiện ra định lí trước khi chứng minh nó. Mò mẫm và dự đoán có một vị trí rất quan trọng trong việc sáng tạo, trong đời sống thực tiễn. Chẳng hạn, xét bài toán: “Trong

mặt phẳng, cho k đường thẳng đôi một cắt nhau, nhưng không có bộ ba nào đồng quy. Các đường thẳng đó chia mặt phẳng ra bao nhiêu miền?". GV có thể hướng dẫn HS thực hiện từng bước của quá trình mò mẫm, dự đoán như sau:

Gọi  $N(k)$  là số miền trong mặt phẳng được chia ra bởi k đường thẳng. HS vẽ hình (như hình 3, a), b), c)) và đưa tới nhận xét trong bảng sau:

K	1	2	3	4	k
$N(k)$	2	4 (= 2 + 2)	7 (= 4 + 3)	11 (= 7 + 4)	



Hình 3

Từ bảng trên, GV hướng dẫn HS mò mẫm, dự đoán rằng:  $N(k+1) = N(k) + k + 1$ .

Tiếp đó, GV tổ chức cho HS chứng minh.

**2.2.4. Tổ chức cho HS giải những bài tập mở.** Chẳng hạn như, xét ví dụ về bài toán mở như sau: "Cho tam giác ABC, có  $AB = 6$ ,  $AC = 8$ . Cần phải bổ sung yếu tố nào của tam giác ABC vào giả thiết để tính được đường trung tuyến AM?"

**Nhận xét:** Câu trả lời của bài toán mở là các yếu tố được bổ sung vào giả thiết để tam giác ABC xác định. Bài toán mở cho phép HS tiếp cận lời giải theo nhiều cách khác nhau, phát huy tính độc lập và sáng tạo của người học, khả năng tư duy logic và sáng tạo trong quá trình giải toán.

Có thể có nhiều cách bổ sung khác nhau để bài toán là giải được. Chẳng hạn: +) bổ sung vào giả thiết là: độ dài cạnh BC; +) bổ sung vào giả thiết là: độ dài đường trung bình song song với BC; +) bổ sung vào giả thiết là: độ lớn của góc A; +) bổ sung vào giả thiết là: diện tích của tam giác ABC, ... Ngoài ra, HS có thể bổ sung yếu tố khác để tam giác ABC xác định. Trong quá trình bổ sung một yếu tố vào giả thiết, có thể xảy ra tình huống tam giác ABC không xác định hoặc các số liệu mâu thuẫn với nhau. Khi đó, GV hướng dẫn HS cách đặt lại và kiểm nghiệm tính hợp lý và giải được của các bài toán mới.

**2.2.5. Tổ chức cho HS giải những bài tập đòi hỏi sự kiên trì, bền bỉ, thận trọng.** Chẳng hạn, xét bài toán

sau: "Tìm x, biết  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$  (1). Khi dạy bài toán này, một thực tế là HS dễ mắc sai lầm ở chỗ HS chỉ xét một trường hợp mà quên mất rằng

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & \text{ khi } A \geq 0 \\ -A & \text{ khi } A < 0 \end{cases} \text{ nên dẫn đến lời giải sai}$$

như sau: Ta có  $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \forall x$  nên

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$$

Lời giải bài toán phải được chữa lại như sau:

(1)  $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 3 \Leftrightarrow |x-1| = 3$ . Khi đó: Trường hợp 1:  $x-1 = 3 \Leftrightarrow x = 4$ ; Trường hợp 2:  $x-1 = -3 \Leftrightarrow x = -2$ . Vậy, tập nghiệm của phương trình là  $\{4; -2\}$ .

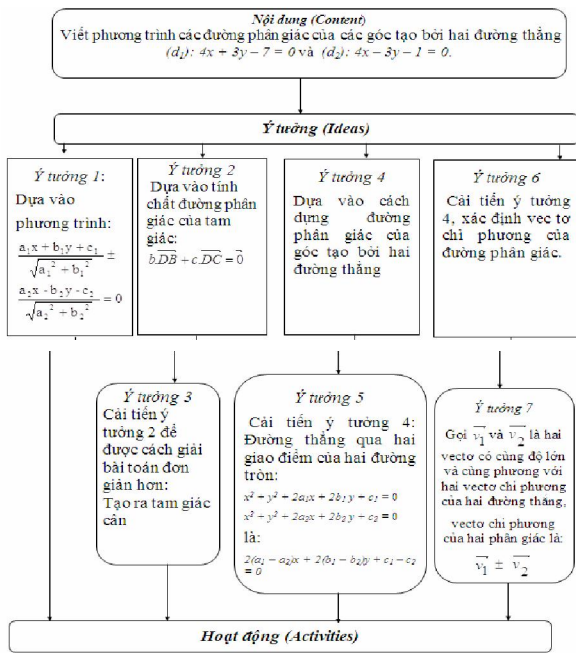
**Chú ý:** Cần nhắc và giúp HS có thói quen giải toán, làm việc thận trọng, chính xác và kiểm tra lại. Điều này sẽ dần trở thành phẩm chất và nhân cách, hình thành văn hóa toán học cho HS.

**2.2.6. Tổ chức dạy học sao cho HS được trải nghiệm những vẻ đẹp của toán học.** Trước hết, đó là cái đẹp của những kết quả, những ứng dụng hay, phong phú, bất ngờ của toán học vào đời sống; cái đẹp của những suy luận logic chặt chẽ, của sự chính xác, cái đẹp của lời giải ngắn gọn, độc đáo, những suy luận linh hoạt, nhận xét sắc sảo của một bài toán, ... hay trong hình học thì là sự xuất hiện của hình học trong đời sống, trong các vẻ đẹp tự nhiên, của những hình vẽ cân đối, hài hòa về tỉ lệ (tỉ lệ vàng trong hội họa), kích thước với sự đối xứng.

**2.2.7. Hỗ trợ HS để có những thành công trong toán học, từ kém toán, sợ toán đến chỗ hứng thú học toán và học khá, giỏi toán.** GV cần hỗ trợ HS trong quá trình học Toán, giúp họ đánh giá, ghi nhận những thành công dù là nhỏ bé trong quá trình học Toán; tạo được hứng thú trong học Toán; từ đó có thể giúp HS yêu thích môn Toán hơn, hứng thú hơn và trở nên học khá, giỏi Toán hơn. Chẳng hạn, trước sai lầm, lúng túng của HS kém môn Toán, GV cần đi sâu tìm hiểu cách suy nghĩ, sai lầm trong tư duy của HS, nhận thức của HS để hỗ trợ họ. Ví dụ khi giải phương

$$\text{trình như sau: } \frac{10x}{7} = 1 \Leftrightarrow 10x = -7 \Leftrightarrow x = \frac{7}{10} \text{ và}$$

(Xem tiếp trang 178)



Hình 5. Quy trình CIA trong dạy học Phương trình đường phân giác

phương diện khác nhau. Dạy học theo quy trình CIA sẽ làm cho bài giảng của GV sôi nổi hơn, hứng thú và có hiệu quả hơn, bởi vì HS có cơ hội được rèn luyện khả năng giải thích các ý tưởng, khả năng sử dụng các nguồn lực để tìm kiếm thông tin cần thiết, để làm việc với những người khác về một vấn đề và tổng quát hóa trong các tình huống khác nhau. □

**Tài liệu tham khảo**

[1] Geoffrey Petty (1998). *Teaching Today: A Practical Guide*. Stanley Thornes Publisher.  
 [2] Rachel Sorensen (2006). *Affect in Mathematics Education, in Educational Studies in Mathematics*. Springer American.  
 [3] Zemelman - Daniels and Hyde (1998). *Principles of best practice learning Best Practice: New Standards for Teaching and Learning in America's Schools*. Springer American.  
 [4] Nguyễn Bá Kim (2006). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.  
 [5] G. Polya (1957). *How to Solve It* (2nd ed.). Princeton University Press, ISBN 0-691-08097-6.

**Phát triển văn hóa toán học...**

(Tiếp theo trang 181)

được yêu cầu trả lời câu hỏi “vì sao em viết  $10x = -7$ ”, thì có HS trả lời là: “vì khi chuyển số 7 từ về trước sang về sau, ta phải đổi dấu của nó, và cũng vì vậy, ta có

$x = \frac{7}{10}$ ”. Trong trường hợp này, nếu GV không đi sâu,

thấy kết quả cuối cùng là đúng (kết quả của hai lần sai dấu) thì cho rằng HS chỉ một lần “sơ ý” nhầm dấu, rồi cho qua; như vậy sai lầm trên đây càng dễ ăn sâu vào nếp nghĩ của HS. Ngay trong trường hợp HS làm đúng cả, nhưng nếu đi sâu tìm hiểu thì có khi phát hiện được những điều ít ngờ tới trong tư duy của HS kém. Chẳng hạn, có em viết đúng:

$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$  nhưng giải thích như sau: “ $a^2$  chia cho  $a$ , được  $a$ ; dấu  $-$  chia cho dấu  $+$  được dấu  $-$ ;  $b^2$  chia cho  $b$ , được  $b$ ”.

\*\*\*

Phát triển văn hóa toán học cho người học là một định hướng dạy học phù hợp với quan điểm: Dạy toán là dạy cách học toán, dạy cách làm ra kiến thức toán học, chứ không phải truyền thụ trực tiếp kiến thức đó. HS phải mò mẫm và sử dụng các loại tư duy

như tư duy biện chứng, suy luận có lí, suy luận ngoại suy, khái quát hóa, tương tự hóa, đặc biệt hóa,... để dự đoán các kết quả, quy luật trước khi chứng minh chúng và sáng tạo ra các bài toán mới. Phạm vi ứng dụng của kiến thức toán học, tuy đã mở ra rất rộng nhưng vẫn có hạn, còn phạm vi ứng dụng của văn hóa toán học (tư duy và nhân cách) thì rộng hơn nhiều. Vì vậy phát triển văn hoá toán học cho HS cần được tính đến trong xây dựng chương trình trên phương diện liều lượng kiến thức toán học đưa vào để người dạy có thời gian rèn luyện và bồi dưỡng tư duy cho HS. □

**Tài liệu tham khảo**

[1] Nguyễn Cảnh Toàn (2009). *Nên học toán như thế nào cho tốt?* NXB Giáo dục Việt Nam.  
 [2] Nguyễn Cảnh Toàn (2009). *Học cách sáng tạo*. NXB Giáo dục Việt Nam.  
 [3] Bùi Văn Nghị (2013). *Dạy văn hóa toán học cho học sinh*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Vol 58, tr 3-7.  
 [4] Hoàng Chúng (2000). *Phương pháp dạy học toán học ở trường phổ thông trung học cơ sở*. NXB Giáo dục.  
 [5] Hoàng Chúng (1969). *Rèn luyện khả năng sáng tạo toán học ở trường phổ thông*. NXB Giáo dục.  
 [6] Kruteski V.A (1973). *Tâm lí năng lực toán học của học sinh*. NXB Giáo dục.