VJE Tạp chí Giáo dục, Số 448 (Kì 2 - 2/2019), tr 42-47

KHÁI NIỆM VÀ MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA NĂNG LỰC TRỰC GIÁC TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

Võ Xuân Mai - Trường Đại học Đồng Tháp

Ngày nhận bài: 01/10/2018; ngày sửa chữa: 21/11/2018; ngày duyệt đăng: 23/11/2018.

Abstract: In this article, we present the concept and some characteristics of mathematical intuitive competence, therefore we propose some ideas for organizing activities to promote these characteristics in teaching Mathematics at school. Then, Next, we encourage teachers to pay more attention to exploiting and using compatible intuition activities in teaching Mathematics to form and develop mathematical intuitive competence for students, which contributes to a balance between intuitive elements and logical arguments in the process of mathematical awareness.

Keywords: Mathematical intuition, mathematical intuitive competence, characteristics of mathematical intuitive competence, teaching Mathematics.

1. Mở đầu

Việc phát triển năng lực (NL) tư duy toán học và NL giải quyết vấn đề một cách sáng tạo là một nhiệm vụ thiết yếu cần hình thành cho học sinh (HS) qua dạy học môn **Toán**, đặc biệt trong giai đoạn đổi mới căn bản, toàn diện GD-ĐT hiện nay. Trong quá trình dạy học toán, song song với việc hình thành NL tư duy logic, khả năng lập luận rõ ràng cần chú trọng phát triển cho HS các NL tư duy tiền logic, khả năng trực giác toán học (TGTH), khả năng tìm tòi, khám phá sáng tạo, cách suy nghĩ, tư duy sáng tạo, cách phát hiện và giải quyết các tình huống của đời sống thực tiễn giúp HS phát triển NL, phẩm chất một cách toàn diện. Tác giả Trần Kiều khẳng định "*đặc biệt cần lưu ý đến NL tư duy logic trong suy diễn, lập luận; đồng thời coi trọng tư duy phê phán, sáng tạo, cũng như các yếu tố dự đoán, tìm tòi, TGTH, tưởng tượng không gian*" [1; tr 9-10]. Nhiều nhà giáo dục đã khẳng định TGTH đóng vai trò đặc biệt trong quá trình phát triển nhận thức của HS, giúp người học tích cực và sáng tạo hơn trong việc đưa ra các phán đoán, tự tìm kiếm, khám phá kiến thức mới, hình dung trước được đường lối, chiến lược giải quyết cho những vấn đề không quen thuộc từ đó người học có thể đưa ra quyết định thích hợp trước khi bắt tay vào giải quyết vấn đề rõ ràng cụ thể. Do đó, TGTH được xem như là hoạt động nhận thức có một ý nghĩa quan trọng để đạt được nhiệm vụ đã đề cập trên.

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày khái niệm và một số đặc trưng của NL TGTH qua dạy học toán, từ đó chúng tôi đề xuất một số ý tưởng cho việc tổ chức hoạt động có thể phát huy những đặc trưng đó trong quá trình dạy học môn *Toán* ở trường phổ thông. Với vai trò cần thiết của TGTH, chúng tôi khuyến khích giáo viên (GV) cần quan tâm đúng mức hơn nữa việc khai thác và sử dụng những hoạt động trực giác tương thích trong dạy học toán nhằm hình thành và phát triển NL TGTH cho HS góp phần tạo sự cân đối giữa yếu tố trực giác và lập luận logic trong quá trình nhận thức toán học hướng tới sự phát triển NL toàn diện cho người học theo định hướng hiện nay.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Khái niệm năng lực trực giác toán học

Như đã đề cập đến khái niệm TGTH trong [1], chúng tôi quan niệm "*TGTH là nhận thức trực tiếp các đối tượng, các quan hệ toán học một cách nhanh chóng do có sự rút gọn quá trình lập luận hoặc không cần dựa trên sự phân tích, chứng minh đúng đắn rõ ràng*".

NL là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể. Có thể thấy NL có những đặc trưng sau: mỗi NL gắn với một hoạt động cụ thể, tức là được hình thành, bộc lộ và thể hiện qua hoạt động; Đảm bảo hoạt động có hiệu quả; Tri thức, kĩ năng là điều kiện cần thiết để hình thành NL; NL góp phần cho quá trình lĩnh hội tri thức, kĩ năng trong lĩnh vực hoạt động nhất định được nhanh chóng, thuận lợi; NL là sự phối hợp, sự tổng hợp, sự huy động nhiều nguồn lực: kĩ năng, kiến thức, kinh nghiệm, thái độ và sự hứng thú. Do đó, chúng tôi quan niệm "*NL là tổ hợp những thuộc tính độc đáo của cá nhân, bao gồm kiến thức, kĩ năng và thái độ, phù hợp với yêu cầu của một hoạt động nhất định, đảm bảo cho hoạt động đó có hiệu quả*".

Từ những công trình nghiên cứu của các tác giả trên thế giới và trong nước về quan niệm NL và khái niệm TGTH, chúng tôi đưa ra khái niệm về NL TGTH của HS như sau: "*NL TGTH là NL hoạt động của chủ thể nhằm nhận thức trực tiếp được những đặc điểm, thuộc tính bên trong của các đối tượng, quan hệ và vấn đề toán học một cách nhanh chóng trong những tình huống nhận thức cụ thể do có sự rút gọn quá trình lập luận hoặc không cần dựa trên sự phân tích, chứng minh đúng đắn rõ ràng*".

2.2. Một số đặc trưng của năng lực trực giác toán học của học sinh

Email: vxmai@dthu.edu.vn

NL TGTH hiển nhiên mang những đặc trưng chung của NL, đó cũng là một thành phần của NL toán học, theo tác giả Krutexki "*những NL toán học được hiểu là những đặc điểm tâm lí cá nhân (trước hết là những đặc điểm hoạt động trí tuệ) đáp ứng những yêu cầu của hoạt động học tập toán học, và trong những điều kiện vững chắc như nhau thì là nguyên nhân của sự thành công trong việc nắm vững một cách sáng tạo toán học với tư cách là một môn học, đặc biệt nắm vững tương đối nhanh, dễ dàng, sâu sắc những kiến thức, kĩ năng, kĩ xảo trong lĩnh vực Toán học*" [2; tr 126]. Như vậy, trong quá trình nghiên cứu việc phát triển NL TGTH của HS trong hoạt động nhận thức của quá trình dạy học toán cần tách NL TGTH trong NL toán học với những tính chất riêng biệt thể hiện sự đặc trưng nhằm hiểu được sâu sắc hơn và phân biệt NL TGTH với các thành phần khác của NL toán học của HS trong học tập toán ở trường phổ thông. Trên cơ sở các nghiên cứu, chúng tôi có thể xác định một số đặc trưng của NL TGTH của HS trong quá trình dạy học toán ở trường phổ thông như sau:

2.2.1. Sự nhận thức trực tiếp các đối tượng, quan hệ, vấn đề toán học

Đặc trưng cơ bản nhất có thể nhận thấy ngay qua khái niệm, đó là NLTGTH được đặc trưng bởi sự nhận thức trực tiếp các đối tượng, quan hệ, vấn đề toán học, giúp chủ thể nhận thức nắm bắt một cách nhanh chóng, ngay lập tức được những thuộc tính bên trong của các đối tượng, quan hệ, vấn đề toán học trong quá trình chủ thể lĩnh hội kiến thức toán học. Nhiều tác giả sử dụng cụm từ "nhận thức trực tiếp" để chỉ đặc trưng này của trực giác. J. Piaget cho rằng trực giác "*một phạm trù nhất định của nhận thức trực tiếp nắm bắt sự vật, đối tượng mà không có bất cứ nhu cầu biện minh hoặc diễn giải rõ ràng*" [3; tr 3]. Tác giả Wilder cho rằng trực giác "*là nhận thức ngay tức khắc đối tượng, của một số đối tượng cụ thể, mà không cần hỗ trợ từ các giác quan hay từ lí do để giải thích cho sự nhận thức đó*" [4; tr 605]. Còn theo Arnheim nhận định đó là "*một đặc tính cụ thể của nhận thức, có khả năng nắm bắt trực tiếp sự hiệu quả của tương tác xảy ra trong tình huống nhận thức. Trực giác là một phần của mỗi hoạt động nhận thức*" [5; tr 36].

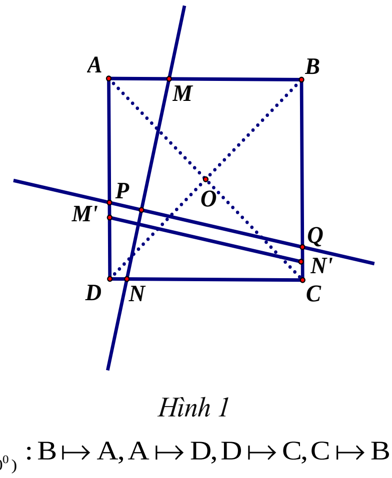
TGTH như là sự bừng sáng đột ngột trong việc giải quyết vấn đề, do đó NL TGTH của HS thể hiện ở chỗ chủ thể nhận thức có thể nắm bắt ngay vấn đề, xử lí ngay lập tức vấn đề hoặc nhìn thấy ngay kết quả của vấn đề toán học. Đặc trưng này của NL TGTH được thể hiện nhờ người học có thể tưởng tượng, hình dung được vấn đề toán học trong tâm trí, sử dụng liên tưởng và huy động kiến thức một cách nhanh chóng từ đó có thể "bộc phát" nhìn thấy ngay những vấn đề của toán học hoặc những chiến lược giải quyết bài toán.

Ví dụ 1. Khi đứng trước một bài toán hình học, sự bừng sáng ý tưởng trong việc giải quyết vấn đề của HS thể hiện ở việc thấy ngay được cách vẽ được đường phụ thích hợp, chẳng hạn là đường thẳng vuông góc hay song song với đường thẳng nào đó để tìm ra cách giải, sau đó mới thực hiện các bước trình bày lời giải bài toán. Xét bài toán sau: "Cho hình vuông $ABCD$ và hai đường thẳng a, b vuông góc nhau. Đường thẳng a cắt AB và CD lần lượt tại các điểm M, N. Đường thẳng b cắt AD và BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng $MN = PQ$".

- Nếu xét đây là bài toán dành cho HS lớp 8, NL TGTH của HS được thể hiện khi các em có thể phát hiện được cách vẽ đường phụ thích hợp để giải quyết bài toán: ở đây, việc kẻ đường thẳng vuông góc (hoặc song song) với các cạnh của hình vuông để tạo ra hai tam giác vuông nhận MN, PQ làm cạnh huyền, do có phương pháp giải trước đó để chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau, với ý tưởng chứng minh cần tạo ra được hai tam giác bằng nhau chứa các cạnh MN, PQ tương ứng. Kẻ $MH \perp CD, QK \perp AD$. Sau đó, HS dễ dàng chứng minh được hai tam giác vuông $\Delta MNH = \Delta QPK$ do đó $MN = PQ$.

- Đối với HS lớp 11, qua bài toán trên HS hình dung ra được tính chất vuông góc của hai đường thẳng đã cho cắt các cạnh của hình vuông, việc chứng minh độ dài các đoạn thẳng bằng nhau giúp HS nhận thức được bài toán nhanh chóng, từ đó trực giác phát hiện được chiến lược giải quyết bài toán có thể liên hệ việc vận dụng phép quay với góc quay 90^0 vào giải bài toán này.

Giải bài toán bằng sử dụng phép quay: Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ (các đỉnh sắp theo chiều kim đồng hồ) (*hình 1*).



Hình 1

$Q_{(O,90^0)}: B \mapsto A, A \mapsto D, D \mapsto C, C \mapsto B$ do đó

$Q_{(O,90^0)}: BA \to AD, M \mapsto M', (M' \in AD)$ và

$Q_{(O,90^0)}: DC \to CB, N \mapsto N', (N' \in CB)$.

Theo tính chất của phép quay ta có: $MN = M'N'$, $MN \perp M'N'$. Mà theo giả thiết ta lại có: $MN \perp PQ \Rightarrow PQ // \equiv M'N' \Rightarrow MN = PQ$.

2.2.2. Sự rút gọn quá trình lập luận hoặc không cần thông qua các bước lập luận logic chặt chẽ, rõ ràng

NL TGTH là NL của chủ thể trong quá trình nhận thức trực tiếp đối tượng, quan hệ toán học mà không cần thông qua các thao tác phân tích theo trình tự nghiêm ngặt của quá trình suy diễn. Sự nhanh chóng nhận thấy được đối tượng, quan hệ, vấn đề toán học của NL TGTH là nhờ các bước trung gian trong quá trình lập luận, diễn giải, phân tích đã được lược bỏ, rút gọn. Theo Krutexki, NL TGTH được hiểu như là NL rút ngắn quá trình lập luận toán học và các phép toán tương ứng hay NL suy nghĩ với những cấu trúc được rút gọn [2; tr 129]. Krutexki cũng cho rằng "*Trong nhiều trường hợp, sự bừng sáng đột ngột của HS có NL có thể được giải thích bởi sự ảnh hưởng vô thức của kinh nghiệm quá khứ mà cơ sở của chúng là NL khái quát hóa các đối tượng, các quan hệ, các phép toán học và NL tư duy bằng các cấu trúc rút gọn*" [2; tr 15-16]. Theo tác giả Nguyễn Văn Lộc "*TGTH là một yếu tố của một phương thức tư duy được gọi là tư duy trực giác, tư duy dựa trên sự tri giác toàn bộ vấn đề ngay lập tức, có khả năng thực hiện dưới dạng biến đổi đột ngột, chuyển hóa nhanh, lược bỏ các khâu bộ phận*" [6; tr 32]. Đặc trưng này được thể hiện khi HS có khuynh hướng suy nghĩ nhanh chóng, ngắn gọn về đường lối chứng minh hay bỏ qua các bước phân tích lập luận logic; HS nhanh chóng nắm bắt được bản chất và đi sâu vào vấn đề, giản lược những giai đoạn lập luận trung gian, không chú trọng đến những biến đổi hình thức dài dòng để có thể dễ dàng hình dung ra được kết quả hay đường lối giải quyết vấn đề.

Vì vậy, NL TGTH cho chủ thể nhận thức có thể có ngay kết luận trực tiếp, không cần thông qua phân tích, lập luận dài dòng hoặc chỉ cần vài bước suy luận ngắn gọn, đó là quá trình tư duy "nhảy vọt" hay "tư duy rút gọn" mà chủ thể nhận thức có thể trả lời được câu hỏi của vấn đề đang xem xét, hay giải quyết được vấn đề đặt ra của kiến thức toán học mà chủ thể đang đối mặt với khả năng hình dung ra kết quả của một vấn đề hoàn toàn ngắn gọn. Tuy nhiên, do không dựa trên những lập luận chi tiết và chứng minh rõ ràng nên kết quả của trực giác có thể là đúng đắn, cũng có thể là sai lầm, do đó cần phải sử dụng suy diễn để kiểm nghiệm lại kết quả của trực giác.

Ví dụ 2. Bằng việc không cần thông qua nhiều bước phân tích lập luận chi tiết, nhờ rút gọn các bước biến đổi, HS lớp 10 có thể đưa ra kết quả của bài toán "Giải phương trình: $\sqrt{5x^2-10x+6}+\sqrt{4x^2-8x+13}=4$".

- Đối với HS chưa có khả năng trực giác, có thể nhận dạng đây là phương trình chứa căn thức có biểu thức dưới căn dạng khá phức tạp, với phương pháp giải đã biết là đặt ẩn phụ rồi bình phương hai vế để khử căn thức trong tình huống này có thể sử dụng, tuy nhiên sẽ khá dài dòng với nhiều thao tác phân tích, biến đổi chi tiết. Cụ thể, có thể đặt ẩn phụ $t = x^2 - 2x + 1$, điều kiện $t \geq 0$. Khi đó phương trình tương đương với $\sqrt{5t+1}+\sqrt{4t+9}=4$. Đây là dạng phương trình căn thức cơ bản, HS có thể dễ dàng bình phương hai vế và thực hiện các thao tác biến đổi tương đương để giải phương trình theo ẩn mới, từ đó tìm được nghiệm của phương trình đã cho. Quá trình giải trên chú trọng các bước phân tích biến đổi chi tiết, lập luận rõ ràng mới có thể đưa ra được kết quả của bài toán.

- Đối với HS có khả năng trực giác sẽ phát hiện kết quả của bài toán theo hướng rút gọn quá trình lập luận và biến đổi chi tiết như sau: Nếu HS quan sát vào các biểu thức trong mỗi dấu căn thì có thể biến đổi ngay được về dạng kA^2+l, với k, l là các hằng số. Do đó, có thể tính giá trị nhỏ nhất của vế trái, từ đó suy ra được kết quả bài toán qua một số bước suy luận ngắn gọn trong suy nghĩ của HS như sau:

Vế trái của phương trình sẽ lớn hơn bằng một hằng số, và có thể biến đổi nhanh chóng thấy ngay là vế trái lớn hơn hoặc bằng 4 vì căn thứ nhất lớn hơn hoặc bằng 1 và căn thứ hai lớn hơn hoặc bằng 3.

Vế phải của phương trình bằng 4, do đó phương trình có nghiệm khi dấu bằng ở vế trái xảy ra. Từ đó có thể đưa ra nghiệm của phương trình là $x = 1$.

Sau đó có thể trình bày các bước chứng minh, lập luận rõ ràng như sau:

Ta có:

$$\begin{matrix} \sqrt{5x^2-10x+6}=\sqrt{5(x-1)^2+1}\geq 1, \\ \sqrt{4x^2-8x+13}=\sqrt{4(x-1)^2+9}\geq 3 \end{matrix}, \ \forall x \in R.$$

Suy ra $\sqrt{5x^2-10x+6}+\sqrt{4x^2-8x+13}\geq 4$, $\forall x \in R$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \sqrt{5(x-1)^2+1}=1 \\ \sqrt{4(x-1)^2+9}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Như vậy, HS có thể phát hiện ngay kết quả bài toán, hơn nữa lời giải khá ngắn gọn và nhanh chóng hơn so với cách giải bằng phương pháp đã biết như trên.

2.2.3. Sản phẩm của quá trình tích lũy, suy ngẫm trong quan sát và giải quyết vấn đề đã có trước đó

Một đặc trưng khác của NL TGTH của HS trong quá trình học tập toán đó là sản phẩm của quá trình tích lũy, suy ngẫm trong quan sát, nghiên cứu qua kinh nghiệm thành công và thất bại trong quá trình giải quyết vấn đề trước đó, với độ nhuần nhuyễn và thành thục của tri thức, độ nhanh chóng của các liên tưởng. NL này thể hiện ở trình độ nhận thức bậc cao như sự thăng hoa của quá trình nhận thức và tư duy tầng sâu của trí tuệ. Do sự phát triển NL trí tuệ diễn ra trong quá trình hoạt động tư duy mà sự phát triển tư duy bao giờ cũng diễn ra trong quá trình lĩnh hội kiến thức, bởi vậy khi nói đến TGTH là phải gắn nó với phạm vi hoạt động toán học cụ thể, hơn nữa, tính chất trực tiếp của nhận thức TGTH có tính lịch sử, nó phải được xem xét trong mối liên hệ với tri thức của môn học cũng như vốn kiến thức và kinh nghiệm mà HS tích lũy.

Theo Krutexki, "*hiện tượng giải toán đột ngột là kết quả của sự hoạt động trí óc lâu dài từ trước, là kết quả của kinh nghiệm, kĩ năng, tri thức đã tích lũy được từ trước, là kết quả của sự chế biến, sử dụng thông tin mà người giải đã tích lũy được trước kia*" [2; tr 125]. Tác giả Fischbein cũng khẳng định "*Kinh nghiệm là yếu tố nền tảng trong việc hình thành trực giác*" hay "*Những nguồn gốc cơ bản của nhận thức trực giác chính là kinh nghiệm được tích lũy bởi con người trong những điều kiện, tình huống liên quan không thay đổi*" [3; tr 85]. NL TGTH biểu hiện qua hiện tượng bừng sáng ý tưởng mới, giải toán đột ngột có được cũng dựa trên quá trình tích lũy kinh nghiệm, vốn hiểu biết, kiến thức, kĩ năng và kĩ xảo đã có trước đó của chủ thể nhận thức, được thể hiện thông qua khả năng liên tưởng, khái quát hóa nhanh chóng các đối tượng, quan hệ toán học và các NL tư duy khác. Hơn nữa, việc chủ thể nhận thức nắm bắt ngay được vấn đề là do trình độ tích lũy của họ ở mức cao, nhuần nhuyễn, sâu sắc với việc nắm được ý nghĩa bản chất của tri thức, nên TGTH được xem như là bước đột phá trong quá trình tư duy của con người trong nhận thức toán học.

Ví dụ 3. Xét bài toán "Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Chứng minh rằng: $AH + BC > AB + AC$".

- Với bài toán có liên quan đến tam giác vuông, yêu cầu chứng minh bất đẳng thức liên hệ giữa đường cao và các cạnh của tam giác vuông, HS có thể liên tưởng và huy động đến vốn kiến thức, kinh nghiệm đã có như bất đẳng thức trong tam giác, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, định lí Pytago, công thức diện tích tam giác.

- Việc sử dụng bất đẳng thức trong các tam giác AHB và AHC khi HS bắt tay vào làm sẽ không dẫn đến được điều cần phải chứng minh.

- Nếu HS nhận định các cặp AH, BC và AB, AC vuông góc nhau nên liên tưởng đến diện tích vì thế có thể sử dụng bình phương hai vế để biến đổi tương đương bất đẳng thức. Việc huy động các kiến thức được tích lũy sau nhiều lần va chạm trước đó có liên quan đến dữ kiện của bài toán tam giác vuông giúp HS trực giác, phát hiện đến việc sử dụng công thức diện tích tam giác vuông $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{1}{2}AB.AC$ và định lí Pytago $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

- Nhờ việc liên tưởng đến kiến thức tích lũy đã có để phát hiện hướng giải quyết vấn đề, khi đó HS có thể thực hiện các thao tác cụ thể với những biến đổi tương đương như sau:

$$AH + BC > AB + AC \Leftrightarrow (AH + BC)^2 > (AB + AC)^2$$

$$\Leftrightarrow AH^2 + 2AH.BC + BC^2 > AB^2 + AC^2 + 2AB.AC$$

$$\Leftrightarrow AH^2 > 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Như vậy, bằng việc tích lũy kiến thức, kinh nghiệm đối mặt với các bài toán về tam giác vuông, HS có thể trực giác phát hiện việc sử dụng định lí Pytago và công thức diện tích tam giác trong tình huống mới này là hiệu quả. Việc tích lũy kiến thức, kinh nghiệm và hoạt hóa các liên tưởng rồi huy động những kiến thức liên quan chính là nền tảng cho việc đưa ra giải pháp hợp lí để giải quyết được bài toán.

2.2.4. Đặc trưng bởi kết quả của sự sáng tạo, đột phá

NL TGTH cũng được đặc trưng bởi tính chất của tư duy sáng tạo, đó là sự lóe sáng những ý tưởng mới, độc đáo mang tính đột phá trong điều kiện tình huống mới không quen thuộc đang đối mặt với chủ thể người học. Theo Hadamard nhận định "*trực giác như là nguồn gốc của sự đổi mới chân chính, sáng tạo*" [6; tr 326]. Khẳng định về vai trò của trực giác trong sáng tạo, nhà nghiên cứu L. D. Broglie cho rằng "*Nhờ những bước nhảy vọt phi lí, ta có thể bẻ gãy được cái vòng cứng nhắc, trong lối suy luận diễn dịch vẫn giam hãm chúng ta, phép quy nạp dựa trên tưởng tượng và trực giác cho phép ta thể hiện những chinh phục vĩ đại của tư duy; nó là cơ sở của tất cả những thành tựu thực sự của khoa học*" [7; tr 28].

Do TGTH thể hiện sự tư duy linh hoạt, các liên tưởng có thể nhanh chóng chuyển hướng tư duy này sang hướng tư duy khác trong quá trình giải quyết vấn đề không hiệu quả, nó biểu hiện tính ứng biến cao luôn tìm cách giải quyết vấn đề một cách linh hoạt trong bối cảnh mới của vấn đề, do đó NL TGTH cũng có một số nét đặc trưng của hoạt động sáng tạo như thấy được việc chuyển các kiến thức và phương pháp đã biết vào tình huống mới, khả năng nhìn thấy được ngay vấn đề toán học trong tình huống không quen thuộc, khả năng nhìn thấy được chức năng mới của đối tượng, độc lập tổ hợp các cách thức hoạt động đã biết thành cách thức mới, khả năng nhìn thấy được cấu trúc của đối tượng, khả năng nhìn thấy được các lời giải có thể của vấn đề đã cho, các cách giải khác nhau, khả năng thay đổi nhanh chóng và dễ dàng hướng suy nghĩ trong những bối cảnh có ý nghĩa mới, khả năng tìm giải pháp mới khi đã biết những giải pháp khác.

Ví dụ 4. Sau khi HS học xong bài "Một số phương trình đưa về phương trình bậc nhất, bậc hai" [8], xét một phương trình dạng mới chưa biết cách giải đối với HS, đề xuất các ý tưởng mới cho việc giải quyết bài toán: "Giải phương trình $\sqrt{4x+1}=2x^2+2x+1$".

- Kiến thức và phương pháp đã biết không tương thích trong tình huống mới: Đây là một bài toán giải phương trình chứa căn thức dạng $\sqrt{A}=B$ tuy nhiên các cách giải đã biết không hiệu quả đối với tình huống mới. Rõ ràng không thể dùng các phép biến đổi tương đương thông thường nhằm khử căn thức để giải phương trình trên vì sẽ làm tăng bậc một cách đáng kể, khi đó vấn đề trở nên phức tạp hơn.

- HS cần nhìn thấy được giải pháp mới sáng tạo cho vấn đề chưa quen thuộc. Trước hết, HS có thể mò mẫm thấy ngay $x=0$ là một nghiệm của phương trình, tuy nhiên cần suy nghĩ đến một vài hướng mới để đưa ra phương pháp giải:

Hướng 1: Các biểu thức của phương trình làm phát hiện việc biến đổi để xuất hiện bình phương đủ, từ đó nảy sinh ý tưởng biến đổi phương trình về dạng $A^2+B^2=0$. Kiểm tra kết quả của trực giác qua các bước lập luận như sau:

Phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sqrt{4x+1}=4x^2+4x+2 \text{ với } x\ge -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1-2\sqrt{4x+1}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+\left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^2=0\\ \left(\sqrt{4x+1}-1\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ \sqrt{4x+1}=1\end{cases} \Leftrightarrow x=0$$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Hướng 2: Tìm cách đặt ẩn phụ để giải bài toán tuy nhiên khó có thể đưa phương trình về ẩn mới hoàn toàn, từ đó nảy sinh ý tưởng đặt ẩn phụ không hoàn toàn, kết hợp đặt ẩn chính và ẩn phụ để giải quyết vấn đề. Kiểm tra kết quả của trực giác qua các bước lập luận như sau:

Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{4}$. Đặt $t=x^2+x$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$2t+1=\sqrt{4x+1} \Leftrightarrow (2t+1)^2=4x+1 \text{ với } t\ge -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=t^2+t.$$

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}t=x^2+x\\ x=t^2+t\end{cases}$.

Bài toán giải phương trình đưa về giải hệ phương trình đối xứng quen thuộc. Trừ vế theo vế ta có:

$(x-t)(x+t+2)=0 \Leftrightarrow x=t$, vì $x\ge -\frac{1}{4}$, $t\ge -\frac{1}{2}$ nên $x+t+2>0$.

Thay vào phương trình còn lại trong hệ ta được $x=0$ (thỏa điều kiện). Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ngoài ra, NL của mỗi người nói chung và NL TGTH nói riêng dựa trên tố chất sẵn có của mỗi cá nhân và chủ yếu NL hình thành, phát triển và thể hiện trong hoạt động tích cực của con người dưới sự tác động của rèn luyện và dạy học. Những đặc trưng nói trên của NL TGTH đã định hướng việc xác định các yếu tố đặc thù nhằm hình thành và phát triển NL TGTH trong dạy học toán thông qua những hoạt động trực giác tương thích.

2.3. Một số ý tưởng tổ chức hoạt động nhằm phát huy các đặc trưng của năng lực trực giác toán học cho học sinh ở trường phổ thông

Nhiều nhà giáo dục học đã đề xuất những ý tưởng cho việc vận dụng trực giác vào trong lĩnh vực dạy học. Tác giả Wilder đã nhấn mạnh "*Phương pháp dạy học hiện đại cần nhận ra được vai trò của trực giác bằng cách thay thế việc dạy "làm điều này, làm điều kia" bởi "điều gì nên làm tiếp theo". Đó là cách tiếp cận để nền tảng trực giác sẵn sàng phát triển, với cách này sự hiểu biết và phê phán kiến thức có thể thấm nhuần đúng đắn trong HS*" [4; tr 610]. Theo J. Howarth cho rằng "*Giải pháp trực giác của vấn đề là quan trọng. Chủ yếu đó là việc tìm kiếm câu trả lời cho một vấn đề trước khi bạn giải quyết nó. Người học cần được cám dỗ để tin rằng trực giác là cái gì đó mà họ có thể có. Chúng tôi chắc chắn rằng tất cả đều có những tài năng khác nhau, nhưng quá trình khơi gợi tài năng đó cần được khuyến khích. Đó là một trong những điều mà dạy học cần làm. GV có thể khuyến khích tài năng bằng cách ví dụ hay mô tả cách tiếp cận riêng để giải quyết vấn đề*" [9; tr 30].

Để đưa TGTH vào dạy học, chúng tôi đưa ra một số ý tưởng cho GV tổ chức hoạt động trong quá trình dạy học toán nhằm phát huy các đặc trưng của NL TGTH cho HS ở trường phổ thông như sau:

- Tạo những tình huống học tập thích hợp: Thông qua gợi động cơ hoạt động, GV cần tạo ra những tình huống học tập chứa đựng khó khăn, chướng ngại mà đối với những kiến thức, kinh nghiệm đã có của người học không còn tương thích, hoặc những phương pháp đã biết chưa đủ, chưa tối ưu để giải quyết trong hoàn cảnh mới nhằm tạo nhu cầu nhận thức cho người học.

- Tạo cơ hội cho HS hình dung, nhận thức được vấn đề: HS được phát hiện vấn đề, phán đoán về cách giải quyết vấn đề thông qua việc GV yêu cầu HS phát biểu, mô tả về cảm nhận ngay vấn đề, nhận thức trực tiếp về vấn đề trước khi tiến hành thực hiện những bước làm cụ thể.

- Khuyến khích HS đưa ra nhiều phán đoán khác nhau cho vấn đề: với nhiều giải pháp, nhiều khía cạnh khác nhau của vấn đề, tìm kiếm những ý tưởng mới, đột phá và sáng tạo từ người học. Đôi khi GV phải chấp nhận những ý tưởng ngây thơ hay những giải pháp sai lầm của HS.

- Chú trọng phát triển cho HS các NL tư duy tiền logic trong toán học: thông qua các hoạt động, cho HS sử dụng tưởng tượng, liên tưởng, khái quát hóa, suy luận quy nạp.

- Hình thành cho HS thói quen nắm bắt bản chất của vấn đề, đường lối của giải pháp, bỏ qua những bước lập luận dài dòng, chi tiết; luyện tập cho HS hình dung vấn đề hay giải pháp, suy nghĩ, biến đổi nhanh chóng vấn đề thông qua rút gọn quá trình lập luận, lược bỏ những khâu trung gian.

- Khắc sâu mặt ý nghĩa, bản chất và nguồn gốc thực tiễn của tri thức toán học, cân đối hài hòa giữa nội dung và hình thức, cú pháp và ngữ nghĩa của tri thức trong dạy học toán, vì học tập có ý nghĩa tạo nền tảng vững chắc cho quá trình tích lũy kiến thức, chất lượng và tốc độ hoạt hóa các liên tưởng để huy động kiến thức phù hợp, hiệu quả.

- Nhấn mạnh trực giác được xem như là mục đích được tiến hành trước để định hướng chiến lược giải quyết vấn đề, còn lập luận logic và suy diễn như là phương tiện được tiến hành sau đó để kiểm nghiệm lại kết quả của trực giác.

Để tổ chức hoạt động nhằm phát huy những đặc trưng của NL TGTH cho HS qua dạy học toán, chúng tôi nhấn mạnh vai trò tạo sự hứng thú, khơi gợi động cơ học tập và niềm tin cho người học của GV. Ngoài việc lựa chọn, khai thác, thiết kế những nội dung dạy học phù hợp với những tình huống dạy học có vấn đề, tình huống không quen thuộc để tổ chức các hoạt động nhận thức cho HS, GV cần chú trọng việc khuyến khích, tạo niềm tin, động viên người học tự tiếp cận, khám phá, phát hiện vấn đề; tạo cơ hội cho HS được suy nghĩ nhiều hơn, trải nghiệm nhiều hơn thông qua những hoạt động phát triển tư duy, coi trọng các NL tư duy tìm tòi, suy đoán, trực giác và vận dụng kiến thức giải quyết vấn đề. Đặc biệt, trong dạy học quy tắc, phương pháp và giải bài tập, GV cần hạn chế tối đa việc cung cấp trước thuật toán hay quy trình, đưa ra ngay lời giải của bài toán, trình bày ngay phương pháp giải, để giải quyết bài toán đó.

3. Kết luận

Trong bài viết này, chúng tôi đã trình bày bốn đặc trưng cơ bản của NL TGTH, đó là sự nhận thức trực tiếp, quá trình không cần phân tích lập luận rõ ràng hoặc có sự rút gọn quá trình lập luận, kết quả của quá trình tích lũy nhuần nhuyễn kiến thức và kinh nghiệm đã có trước đó, và sự bừng sáng ý tưởng mới mang tính sáng tạo. Qua đó, chúng tôi cũng đề xuất một số ý tưởng cho việc tổ chức hoạt động nhằm phát huy những đặc trưng này trong quá trình dạy học toán từ đó góp phần hình thành và phát triển NL TGTH cho HS. Chúng tôi cho rằng, để dạy cho người học cách tư duy, cách suy nghĩ, cách giải quyết vấn đề và sáng tạo thì cần quan tâm đến các yếu tố suy đoán, trực giác và tưởng tượng trong dạy học môn *Toán*. Tuy nhiên, trong dạy học toán ở trường phổ thông, chúng tôi khuyến nghị GV cần tổ chức những hoạt động nhận thức cho HS nhằm cân đối vai trò bổ sung cho nhau giữa trực giác và suy diễn giúp HS biết sử dụng hợp lí giữa khả năng trình bày, lập luận các vấn đề và khả năng phán đoán, suy luận trực giác cùng với việc được trải nghiệm nhiều hơn trong giải quyết vấn đề trong bối cảnh mới.

Tài liệu tham khảo

[1] Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach. D.* Reidel Publishing Company.

[2] Võ Xuân Mai (2018). *Xây dựng tình huống dạy học sử dụng trực quan hỗ trợ học sinh trực giác toán học giải quyết vấn đề.* Tạp chí Giáo dục, số 431, tr 36-40.

[3] Krutexki V. A. (1973). *Tâm lí năng lực toán học của học sinh.* NXB Giáo dục.

[4] Wilder R. L. (1967). *The role of Intuition.* Science, Vol. 156, issue 3775, pp. 605-610.

[5] V. M. Jagla (1994). *Teachers' Everyday use of Imagination and Intuition: In Pursuit of the Elusive Image.* State University of New York Press.

[6] Tirosh D. - Tsamir P. (2014). *Intuition in Mathematics Education.* Encyclopedia of Mathematics Education, pp. 325-330.

[7] Phạm Gia Đức - Phạm Đức Quang (2005). *Đổi mới phương pháp dạy học môn Toán trung học cơ sở nhằm hình thành và phát triển năng lực sáng tạo cho học sinh.* NXB Đại học Sư phạm.

[8] Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) - Nguyễn Huy Đoan (chủ biên, 2008). *Đại số 10 nâng cao.* NXB Giáo dục.

[9] Burton L. (1999). *Why Is Intuition so Important to Mathematicians but Missing from Mathematics Education?.* For the Learning of Mathematics, Vol. 3, pp. 27-32.

[10] Đào Tam - Võ Xuân Mai (2016). *Hướng tới sự hiểu biết về trực giác và vai trò của trực giác trong dạy học toán.* Tạp chí Giáo dục, số 389, tr 46-49.

[11] Nguyen Phuong Chi - Vo Xuan Mai (2017). *Learning by intuiting - The way to solve unforeseen problems in mathematics education.* Vietnam Journal of Science, Hanoi National University of Education, June 2017, pp. 3-8.