VJE Tạp chí Giáo dục, Số đặc biệt kì 1 tháng 5/2020, tr 98-104 ISSN: 2354-0753

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Nguyễn Ngọc Hà[1], Nguyễn Văn Thái Bình[2,+]

[1]Trường Trung học phổ thông B Bình Lục, Hà Nam;
[2]Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
+ Tác giả liên hệ ● Email: binhnvt@gmail.com

Article History
Received: 10/3/2020
Accepted: 20/4/2020
Published: 08/5/2020

Keywords
mathematical problem solving capacity, mathematical competence, vector method, high school student.

ABSTRACT
Problem-solving capacity in general and mathematical problem-solving capacity in particular are being developed by many scientists and teachers. This issue is particularly meaningful in the context of curriculum and textbook innovation today. The paper presents a brief overview of the concept of mathematical problem-solving capacity. From there, the author offers some steps to organize teaching activities to develop mathematical problem-solving capacity for students. Specific examples of teaching content belonging to the content of solving equations at high school by using the vector method were also introduced. Teaching mathematics in the direction of developing mathematical problem-solving capacity will contribute to developing mathematical competence for students.

1. Mở đầu

Trong công cuộc đổi mới giáo dục, đổi mới chương trình, sách giáo khoa và phương pháp dạy học hiện nay, dạy học nhằm phát triển năng lực (NL) người học là một vấn đề được quan tâm nghiên cứu và triển khai. Trong môn Toán, NL giải quyết vấn đề toán học (GQVĐTH) là một NL thành phần, được quy định trong NL toán học (Bộ GD-ĐT, 2018).

Việc giải toán có tác dụng rất lớn trong việc gây hứng thú học tập cho học sinh (HS) nhằm phát triển trí tuệ và góp phần giáo dục, rèn luyện phẩm chất, NL HS về nhiều mặt. Phương trình, bất phương trình là một hệ thống nội dung có vai trò quan trọng, xuyên suốt trong chương trình môn Toán trong nhà trường phổ thông. Các kiến thức về phương trình liên quan mật thiết tới không chỉ kiến thức đại số, giải tích mà còn cả các nội dung về hình học giải tích, hay còn gọi là phương pháp tọa độ trong mặt phẳng, phương pháp tọa độ trong không gian.

Bài báo này trình bày tóm lược về NL GQVĐTH, một số ví dụ về việc tổ chức, hướng dẫn học sinh (HS) giải phương trình bằng phương pháp vectơ (PPVT).

2. Kết quả nghiên cứu

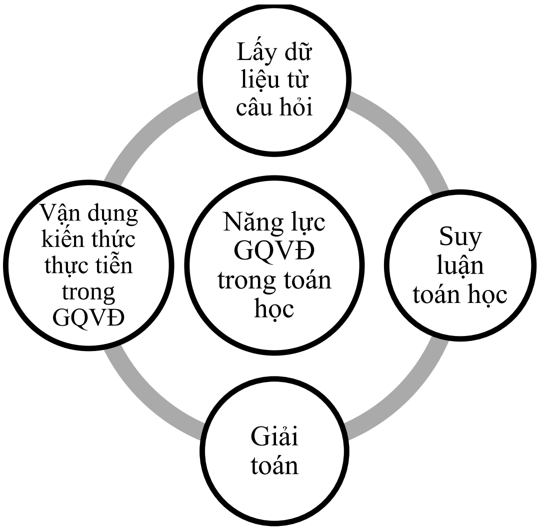
2.1 . Những nghiên cứu về năng lực giải quyết vấn đề toán học

A.N. Cônmôgôrôp (dẫn theo Phạm Văn Hoàn và cộng sự, 1981, tr.128-129) xem xét GQVĐTH từ NL học toán, dựa trên cơ sở 3 thành tố có liên quan đến khả năng biến đổi biểu thức chữ, tưởng tượng và suy luận logic: *+ NL biến đổi thành thạo các biểu thức chữ phức tạp, NL tìm kiếm các phương pháp xa lạ với các quy tắc thông thường để giải phương trình; + Trí tưởng tượng hình học hay "trực giác hình học"; + Nghệ thuật suy luận logic được phân nhỏ hợp lí, tuần tự*. Còn V.A. Krutetxki (1973, tr 168) nhìn nhận quá trình giải quyết vấn đề (GQVĐ) dưới góc độ thu nhận và xử lí thông tin để phân chia *NL toán học theo 4 thành tố*: *+ Thu nhận thông tin toán học; + Chế biến thông tin toán học; + Lưu trữ thông tin toán học; + Thành phần tổng hợp chung* là khuynh hướng toán học của trí tuệ.

UNESCO đã công bố 10 chỉ tiêu NL toán học cơ bản như sau: *+ NL phát biểu và tái hiện những định nghĩa, kí hiệu, các phép toán, các KN. + NL tính nhanh và cẩn thận, sử dụng đúng các kí hiệu; + NL dịch chuyển các dữ kiện thành kí hiệu; + NL biểu diễn các dữ kiện, ẩn, các điều kiện ràng buộc giữa chúng thành kí hiệu; + NL theo dõi một hướng suy luận hay chứng minh; + NL xây dựng một chứng minh. + NL giải một bài toán đã toán học hóa; + NL giải một bài toán có lời văn (chưa toán học hóa); + NL phân tích bài toán và xác định các phép toán có thể áp dụng; + NL khái quát hóa* (UNESCO, 1973).

Nghiên cứu về NL GQVĐ trong giải toán, Lê Thống Nhất (1996) đã đi theo hướng tìm hiểu, phân loại các sai lầm và biện pháp sửa chữa cho HS THPT, Nguyễn Thị Hương Trang (2015) thì tiếp cận NL này từ quan điểm "phát hiện và GQVĐ một cách sáng tạo",...

Từ đặc điểm của NL, tổng hợp các mô hình khác nhau và tập trung vào quá trình GQVĐ, tác giả Wu, M. L. cho rằng: NL GQVĐ trong toán học bao gồm 4 NL thành phần: - NL đọc hiểu để lấy dữ liệu từ câu hỏi; - NL suy luận toán học; - NL thực hiện tính toán; - NL vận dụng kiến thức vào thực tiễn trong GQVĐ (Wu, M. L., 2003, tr 35).



Hình 1. Mô hình NL GQVĐ trong toán học (Wu M. L., 2003)

Vận dụng vào dạy học Toán, Nguyễn Anh Tuấn (2003) đã nêu quan niệm, xác định đặc trưng và thành phần của NL GQVĐ của HS trong học toán *là một tổ hợp NL thể hiện ở các kĩ năng (thao tác tư duy và hành động) trong hoạt động học tập nhằm phát hiện và giải quyết những nhiệm vụ của môn toán.* Tác giả tập trung vào tình huống DH khái niệm đại số ở THCS để cụ thể hóa 7 thành tố của NL này trong quá trình HS nhận thức khái niệm toán học. Giải pháp bồi dưỡng được đề xuất với 8 biện pháp tác động đến những hoạt động phát hiện và GQVĐ của HS khi học khái niệm đại số. Đối với môn Toán THPT, Từ Đức Thảo (2012) đã chuyển sang nội dung DH hình học, ở đó kết quả nghiên cứu chủ yếu là cụ thể hóa NL GQVĐ trong nhận thức hình học, sử dụng 9 biện pháp tổ chức các hoạt động phát hiện và GQVĐ cho HS.

Gần đây, theo định hướng giáo dục toán học tiếp cận NL, các tác giả đã dùng biểu đạt "NL GQVĐTH" - mà thực chất cũng là NL phát hiện và GQVĐ trong dạy học Toán. Phan Anh Tài (2014) đi theo hướng *đánh giá NL GQVĐTH trong dạy học Toán lớp 11*, dựa trên 4 thành tố *hiểu vấn đề, phát hiện và thực hiện giải quyết, trình bày cách giải quyết và phát hiện giải pháp mới*. Hà Xuân Thành (2017) đã nghiên cứu giải pháp dạy học môn Toán *THPT theo hướng phát triển NL GQVĐ thực tiễn thông qua việc khai thác và sử dụng các tình huống thực tiễn,* tập trung vào việc *xây dựng và sử dụng bài tập có nội dung thực tiễn; nhằm vào rèn luyện những thành phần của NL GQVĐTH...*

Từ những kết quả trình bày trên, có thể thấy NL GQVĐTH là tổ hợp các NL thể hiện ở các kĩ năng (thao tác tư duy và hành động) trong hoạt động học tập nhằm giải quyết có hiệu quả những nhiệm vụ của bài toán. NL GQVĐTH là một trong những NL mà môn Toán có nhiều thuận lợi để phát triển cho người học qua việc tiếp nhận khái niệm, chứng minh các mệnh đề toán học và đặc biệt là qua giải toán.

2.2. Một số ví dụ về phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua dạy học giải phương trình bằng phương pháp vectơ

Sau đây, chúng tôi sẽ trình bày một số ví dụ, phân tích thông qua quá trình hướng dẫn HS giải các phương trình nhằm phát triển NL GQVĐ cho HS bằng PPVT. PPVT được hiểu là phương pháp sử dụng các kiến thức về vectơ để giải các bài toán. Nhiều khi, việc giải các bài toán bằng phương pháp quen thuộc, cơ bản gặp rất nhiều khó khăn, trong khi đó, nếu khi sử dụng các kiến thức đơn giản về vectơ thì việc giải bài toán trở nên rất đơn giản.

Ví dụ 1: Giải phương trình $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}\ \ (1)$.

Bước 1: Phát hiện/thâm nhập vấn đề

Câu hỏi (CH) 1: Chúng ta đã biết cách giải của một số phương trình vô tỉ thường gặp. Trong phương trình trên thì phương trình có rơi vào các trường hợp đã học hay không và nếu có thì giải phương trình trên như thế nào?

Sau khi nhận CH thì HS sẽ có nhiều hướng giải quyết. Nhưng sẽ làm nảy sinh trong HS các vấn đề cần tư duy: Dạng toán đã gặp hay chưa? Phương pháp giải hiện tại có giải được hay không? Nếu không thì phải giải phương trình như thế nào?

Bước 2: Tìm tòi hướng giải bài toán

Sau khi đặt CH số 1, HS đã tư duy và phân tích đầu bài, giáo viên (GV) tiếp tục đặt CH cho HS:

CH 2: Trình bày một hướng giải quyết được cho là tối ưu theo hướng suy nghĩ của các em?

Ở bước này, khi HS trình bày giải pháp của mình thì thường gặp một số cách như sau: *Dùng ẩn phụ; Biến đổi tương đương; Phương pháp đánh giá; Phương pháp nhân liên hợp để tạo ra nhân tử chung…*

Các phương pháp này sẽ dẫn đến bài toán có độ phức tạp nhất định.

- Nếu dùng ẩn phụ thì sẽ xuất hiện vấn đề cần giải quyết là: Ẩn phụ phải đặt như thế nào? Nếu đặt như vậy thì có ổn không? Điều kiện của ẩn phụ như thế nào?...

- Nếu dùng phương pháp biến đổi tương đương thông thường thì nảy sinh các vấn đề cần giải quyết như sau: Vì trong phương trình có chứa căn bậc hai, vậy ta phải làm mất căn bậc hai (phải bình phương hai vế của phương trình) nhưng như vậy bài toán có đơn giản hơn hay lại phức tạp hơn? Khi bình phương thì có cần điều kiện gì không? Có phải chia trường hợp không?

- Nếu dùng phương pháp đánh giá thì xuất hiện vấn đề: Dùng cái gì để đánh giá? Nếu dùng bất đẳng thức cauchy thì các vế đã không âm chưa?

- Nếu dùng phương pháp nhân, chia liên hợp có ổn không, phải thêm bớt và tách thế nào?

Tất cả những CH đó sẽ làm khó HS rất nhiều và với kiến thức của các em thì sẽ giải quyết vấn đề đó ra sao?

Vì thế, GV gợi ý cho HS "quy lạ về quen" bằng cách gợi ý thêm phương pháp đó là sử dụng PPVT trong giải toán.

GV khi đưa ra PPVT thì phải xác định được rất nhiều các yếu tố để định hướng và làm điểm xuất phát giúp HS phát hiện ra vấn đề. GV phải xác định được các kiến thức gợi ý đưa ra PPVT như sau:

Khi sử dụng PPVT mà ở đây là công thức về tích vô hướng của hai vectơ thì phải nhìn ra được trong phương trình có các yếu tố về: Độ dài vectơ, tích vô hướng thông qua tọa độ như thế nào? Phải làm sao để hướng HS phát hiện ra phương pháp này?

CH 3: Các em có nhận ra các yếu tố liên quan đến vectơ ở đây không? Có độ dài không? Có tích vô hướng hay không?

Dự kiến nếu HS không trả lời được CH đó thì GV phải tiếp tục đưa ra những CH mang tính gợi ý để HS phát hiện ra vấn đề cần giải quyết.

CH 4: Quan sát phương trình và nhận xét vế trái của phương trình có liên quan đến kiến thức nào của một vectơ đã được học hay không? Chẳng hạn như độ dài, tích vô hướng…

Ở bước này, nếu HS có học lực khá giỏi thì các em sẽ nhìn ra được vấn đề. Nhưng với một HS có học lực trung bình thì GV phải đặt thêm một vài CH nữa để gợi ý các em phát hiện vấn đề.

CH 5: Cho hai vectơ $\vec{u}=(a_1;b_1)$; $\vec{v}=(a_2;b_2)$ hãy viết công thức tích vô hướng và độ dài các vectơ $\vec{u},\vec{v}$ từ đó tìm liên hệ về vectơ và phương trình trong ví dụ?

Phân tích: Ở bước này, nhiều HS sẽ tìm được mối liên hệ đó và có thể viết được biểu thức tọa độ của vectơ trong bài toán. Nhưng cái khó của HS trong bước này là các em sẽ sử dụng kiến thức đó như thế nào để giải được phương trình mặc dù HS có thể đã thiết lập được biểu thức vectơ. Để giải được phương trình, HS phân tích kĩ các kiến thức và tổng hợp các kiến thức có sẵn để giải quyết được vấn đề tìm ra nghiệm của phương trình đã cho.

CH 6: Biến đổi một vế của phương trình về tích vô hướng của hai vectơ, một vế về tích độ dài và từ đó tìm tọa độ vectơ (HS sẽ thực hiện thao tác và tìm ra tọa vectơ).

a) Chuyển tình huống ban đầu sang PPVT

Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

Biến đổi phương trình về dạng: $x.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{3-x}=2.\sqrt{x^2+1^2}$

Đặt $\vec{u}=(x;1)$; $\vec{v}=\left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}\right)$

b) Giải bài toán dưới dạng vectơ

Theo công thức tích vô hướng, ta có: $\vec{u}.\vec{v}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$ (1)

Mặt khác, $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = 2\sqrt{x^2+1}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình đã cho được viết lại dưới dạng sau: $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \vec{u}.\vec{v}$ (3)

Mặt khác ta có: $\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ (4)

Nên từ (3) và (4) suy ra $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = 1$

Bước 3. Trình bày lời giải bài toán

Điều kiện: $-1 \le x \le 3$.

Biến đổi phương trình về dạng: $x.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{3-x} = 2.\sqrt{x^2+1}$

Đặt $\vec{u} = (x;1)$; $\vec{v} = \left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x}\right)$

Theo công thức tích vô hướng ta có:

$$\vec{u}.\vec{v} = x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = 2\sqrt{x^2+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra phương trình đã cho được viết lại dưới dạng sau:

$$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \vec{u}.\vec{v} \quad (3)$$

Mặt khác, ta có:

$$\vec{u}.\vec{v} = \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) \quad (4)$$

Nên từ (3) và (4) suy ra $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|} = 1$

Nên hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng, tức là: $\dfrac{\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{\sqrt{3-x}}{1} \ge 0$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ x+1 = x^2(3-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ (x-1)(x^2-2x-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \\ x=1-\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1$ và $x=1+\sqrt{2}$

Bước 4. Đánh giá quá trình giải và nghiên cứu sâu bài toán

Bài toán có cách giải khác: *Cách 2: dùng phương pháp bất đẳng thức bunhiacopski* (bất đẳng thức này không trực tiếp giảng dạy ở phổ thông); *Cách 3: Nhóm và dùng lượng liên hợp để làm* (cách giải này biểu thức liên hợp cồng kềnh và dễ mắc sai lầm trong quá trình giải do việc nhân chia và thực hiện liên hợp)

Bài tập 2: Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2+2x+10} = \sqrt{29}$ (2).

Bước 1. Phát hiện/ thâm nhập vấn đề

CH1: Tương tự bài tập 1, các em hãy cho biết phương trình trên thuộc dạng toán nào đã học? Cách giải trên như thế nào?

Sau khi nhận CH từ GV, HS sẽ tiếp tục suy luận để tìm ra hướng giải quyết bài toán. Các em phải trả lời được CH: Dạng toán đã gặp hay chưa? Phương pháp giải hiện tại có giải được hay không? và giải như thế nào? Nếu không thì phải giải phương trình như thế nào?

Bước 2. Tìm tòi hướng giải bài toán

Sau khi đặt CH số 1 và cho HS trả lời, GV đưa ra tiếp một số CH khác:

CH 2: Hãy trình bày phương hướng giải quyết bài toán? Và cho biết có thể gặp khó khăn gì trong khi giải bài toán theo các phương pháp đã nêu ra?

HS: Ở CH này, sau khi nhận cũng giống như ví dụ 1 HS sẽ đưa ra một số phương pháp cơ bản thường dùng như: *Dùng ẩn phụ; Biến đổi tương đương; Phương pháp đánh giá; Phương pháp nhân liên hợp để tạo ra nhân tử chung...*

Tuy nhiên, sẽ có một số khó khăn mà HS gặp phải: + Với phương pháp dùng ẩn phụ thì sẽ gặp khó khăn là tìm ẩn biểu thức để đặt ẩn phụ; + Với phương pháp biến đổi tương đương thì việc biến đổi có thể dẫn đến một phương trình bậc 4 (nếu không có nghiệm đặc biệt thì việc tiếp theo giải sẽ khó khăn; có thể dẫn đến bài toán phức tạp hơn). + Với phương pháp đánh giá thì sẽ đánh giá như thế nào? Và dùng công cụ gì để đánh giá? + Với phương pháp liên hợp thì biểu thức liên hợp như thế nào? Và nếu phải thêm bớt thì thêm bớt biểu thức nào cho phù hợp? + Tất cả những CH đó sẽ làm khó cho các em rất nhiều và với kiến thức của các em thì sẽ giải quyết vấn đề đó ra làm sao?

Đến đây thì cũng giống như Bài tập 1, GV tiếp tục dẫn dắt HS "Quy lạ về quen" và gợi ý sử dụng PPVT để giải toán.

Khi hướng dẫn và định hướng cho HS sử dụng PPVT để giải toán thì GV phải làm sao để từ phương trình tạo ra điểm xuất phát giúp HS phát hiện ra vấn đề ở đây là tạo ra các kiến thức dấu hiệu để sử dụng PPVT như độ dài vectơ, tích vô hướng của hai vectơ... tất cả đều nhìn nhận dưới góc độ của tọa độ?

CH 3: Các em có nhận ra các yếu tố liên quan đến vectơ ở đây không? Có độ dài không? Có tích vô hướng hay không?

Dự kiến nếu HS không trả lời được CH đó thì GV phải giúp cho HS phát hiện được bằng cách biến đổi để đưa phương trình về những dạng mà có thể nhận biết ra được dấu hiệu của vectơ trong đó giúp cho HS phát hiện ra vấn đề cần giải quyết.

CH 4: Hãy quan sát và tạo ra các kiến thức liên quan đến vectơ từ các vế của phương trình ví dụ như độ dài, tích vô hướng...

Ở bước này, nếu HS khá giỏi các em sẽ nhìn ra được vấn đề. Nhưng với một HS trung bình thì phải đặt thêm một vài CH nữa để gợi ý các em phát hiện vấn đề.

CH 5: Cho hai vectơ $\vec{u}=(a_1;b_1)$; $\vec{v}=(a_2;b_2)$ hãy viết công thức tính tọa độ vectơ tổng $\vec{u}+\vec{v}$ và độ dài các vectơ $\vec{u},\vec{v}$ từ đó tìm liên hệ về vectơ và phương trình trong ví dụ?

Phân tích: Ở bước này, nhiều HS sẽ tìm được mối liên hệ đó và có thể viết được biểu thức tọa độ của vectơ trong phương trình. Nhưng một khó khăn của các em là việc sử dụng và phát hiện vectơ như thế nào trong phương trình mặc dù HS có thể đã thiết lập được biểu thức vectơ. Để giải quyết được việc này, HS cần sử dụng các tính chất đã nêu ở phần lí thuyết.

CH 6: Các em hãy làm xuất hiện vectơ ở từng vế của phương trình (HS sẽ suy nghĩ và tìm giải pháp). Nếu HS không xử lí được thì GV gợi ý và biến đổi để làm xuất hiện về vectơ từ phương trình. Sau khi đặt CH xong, GV cho HS thực hiện các phép biến đổi trong bước 2.

a) Chuyển tình huống ban đầu sang PPVT

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Biến đổi phương trình về dạng: $\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$

Đặt $\vec{u}=(x-1;2)$; $\vec{v}=(-x-1;3)$; $\vec{u}+\vec{v}=(-2;5)$

b) Giải bài toán dưới dạng vectơ

Ta thấy vế trái của phương trình có chứa: $|\vec{u}|+|\vec{v}|=\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}$.

Còn vế phải của phương trình có chứa dạng: $|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29}$

Nên phương trình có dạng: $|\vec{u}|+|\vec{v}|=|\vec{u}+\vec{v}|$.

Mặt khác $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ dấu "=" xảy ra khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

Nên phương trình $(2) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng

Bước 3. Trình bày lời giải bài toán

Điều kiện: $x \in R$

Ta có: (1): $\sqrt{(x-1)^2+2^2}+\sqrt{(x+1)^2+3^2}=\sqrt{29}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét hai vectơ $\begin{cases} \vec{u}=(x-1;2) \\ \vec{v}=(-1-x;3) \neq \vec{0} \end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases} |\vec{u}|=\sqrt{x^2-2x+5} \\ |\vec{v}|=\sqrt{x^2+2x+10} \\ \vec{u}+\vec{v}=(-2;5) \Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{29} \end{cases}$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow |\vec{u}+\vec{v}|=|\vec{u}|+|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u};\ \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{u}=k.\vec{v}\,(k>0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=k(-1-x) \\ 2=k.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x-1=\dfrac{2}{3}(-1-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ 3x-3=-2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2}{3} \\ x=\dfrac{1}{5} \end{cases}.$$

Bước 4. Đánh giá quá trình giải và nghiên cứu sâu bài toán

a) Bài toán có cách giải khác: Biến đổi tương đương phương trình thì cũng sẽ làm khó cho HS như sau: + HS sau khi bình phương hai vế sẽ làm xuất hiện căn thứ 2 đồng thời phải tiếp tục bình phương lần 2 nhưng sẽ làm xuất hiện phương trình bậc 4. Nếu không biết nhẩm nghiệm thì sẽ rất khó trong quá trình giải; + Khi biến đổi tương đương thì biểu thức bình phương lên sẽ cồng kềnh và khó biến đổi

b) Gợi ý sử dụng: Sau khi giải 2 bài tập như trên và so sánh các cách giải, ta thấy được một số đặc điểm như sau:

Ưu điểm: + Phương pháp này có lời giải ngắn gọn, rõ ràng và dễ hiểu hơn cho người đọc; + Nhận dạng bài toán dễ dàng thì việc thiết lập vectơ sẽ đơn giản hơn; + Giải bài toán theo ngôn ngữ vectơ ít mắc sai lầm vì số trường hợp xảy ra không nhiều.

Nhược điểm: + PPVT đòi hỏi HS phải nắm được kiến thức tổng hợp về vectơ; + Việc chọn lựa vectơ và phát hiện ra PPVT sẽ làm khó nhiều HS có lực học TB và yếu; + Mặc dù sai lầm khi giải bài tập không nhiều, nhưng nếu mắc phải sẽ khó phát hiện ra hơn.

c) Nghiên cứu sâu bài toán: GV cho HS nhận xét đưa ra bài toán tổng quát sau khi đã giải bài toán ở trên. Chẳng hạn: Dạng tổng quát:

Bài tập 1: $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{m^2+n^2}=am+bn$ trong đó a, b, m, n là các số hoặc các biểu thức chứa biến x. và dấu hiệu nhận biết ở đây là từ phương trình phải quan sát được các biểu thức chứa căn tương tự như độ dài vectơ.

Bài tập 2: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{(a+m)^2+(b+n)^2}$ trong đó a, b, m, n là các số hoặc các biểu thức chứa biến x. và dấu hiệu nhận biết ở đây là từ phương trình phải quan sát được các biểu thức chứa căn tương tự như độ dài vectơ hoặc tổng các vectơ.

3. Kết luận

NL GQVĐTH có thể và cần được hình thành thông qua quá trình giải toán. Việc tập luyện các hoạt động tương ứng với quy trình như trình bày ở trên sẽ giúp HS hình thành NL GQVĐTH. Các bài toán về phương trình có thể giải được bằng PPVT sẽ giúp GV có cơ hội tốt để tổ chức cho HS giải, nhằm phát triển NL GQVĐTH. Thời gian trên lớp không đủ để cho GV tiến hành chi tiết, cặn kẽ từng bước, hướng dẫn HS như trình bày ở trên, do đó có những bước cần được tiến hành ngắn gọn hơn, tùy vào đối tượng HS.

Tài liệu tham khảo

Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).*

Bùi Văn Nghị (2008). *Giáo trình phương pháp dạy học những nội dung cụ thể môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.

Krutetxki V.A. (1973). *Tâm lí năng lực toán học của học sinh*. NXB Giáo dục.

Hà Xuân Thành (2017). *Thiết kế các tình huống thực tiễn trong dạy học môn Toán trung học phổ thông nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề của học sinh*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.

Lê Thống Nhất (1996). *Rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh phổ thông trung học thông qua việc phân tích và sửa chữa các sai lầm của học sinh khi giải toán.* Luận án phó tiến sĩ Khoa học Sư phạm - Tâm lí, Trường Đại học Sư phạm Vinh.

Nguyễn Đình Hùng (1996). *Bồi dưỡng tư duy logic cho học sinh trường trung học cơ sở Việt Nam thông qua hệ thống câu hỏi và bài tập đại số lớp 7*. Luận án phó tiến sĩ Khoa học Sư phạm - Tâm lí, Trường Đại học Sư phạm Vinh.

Nguyễn Bá Kim (2017). *Phương pháp dạy học môn Toán.* NXB Đại học Sư phạm.

Nguyễn Thị Hương Trang (2002). *Rèn luyện năng lực giải toán theo hướng phát hiện và giải quyết vấn đề một cách sáng tạo cho học sinh khá giỏi trường trung học phổ thông (qua dạy học giải phương trình bậc hai - phương trình lượng giác)*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam.

Phan Anh Tài (2014). *Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong dạy học toán 11 trung học phổ thông*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh.

Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình (1981). *Giáo dục học môn Toán.* NXB Giáo dục.

Từ Đức Thảo (2012). *Bồi dưỡng năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh trung học phổ thông thông qua dạy học hình học*. Luận án tiến sĩ Giáo dục học, Trường Đại học Vinh.

UNESCO (1973). *International Association for the Evaluation of Education Achievement*, Paris.

Wu, M. L. (2003). *The application of Item Response Theory to measureproblem-solving proficiencies.* The University of Melbourne, Melbourne.