VJE Tạp chí Giáo dục, Số đặc biệt kì 1 tháng 5/2020, tr 111-116 ISSN: 2354-0753

MỘT SỐ BIỆN PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY VÀ LẬP LUẬN TOÁN HỌC CHO HỌC SINH CHUYÊN TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TRONG DẠY HỌC CHỦ ĐỀ "PHƯƠNG PHÁP ĐẾM NÂNG CAO"

Trần Mạnh Sang[1],
Nguyễn Văn Thái Bình[2,+]

[1]Trường Trung học phổ thông Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định;
[2]Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
+ Tác giả liên hệ ● Email: binhnvt@gmail.com

Article History
Received: 12/3/2020
Accepted: 03/4/2020
Published: 08/5/2020

Keywords:
Mathematics subject, Advanced counting method, mathematical thinking and reasoning, thinking capacity.

ABSTRACT
Mathematics has good conditions to develop thinking and reasoning for students in general, and mathematical thinking and reasoning ability in particular. This study aims to help find some methods to develop mathematical thinking and reasoning for math students through teaching the topic "Advanced counting method". These measures focus on training and fostering thinking manipulations for students through organizing students to solve a class of difficult content problems, often in the exam questions in national and international exam for good students. These measures not only help develop students' thinking but also help students practice math skills.

1. Mở đầu

Trong chương trình chuyên Toán THPT, nội dung về tổ hợp luôn là lĩnh vực khó với cả thầy và trò. Các bài toán dạng này xuất hiện nhiều trong các kì thi học sinh (HS) giỏi quốc gia và quốc tế, là một phần quan trọng trong việc phát hiện và bồi dưỡng các HS giỏi. Trong đó, các bài toán đếm thường xuất hiện trong các đề thi.

Bài toán đếm có thể nói là một bài toán cổ xưa nhất: đếm số vật nuôi trong chuồng, đếm số quân của đoàn quân,... Để đếm số lượng đối tượng nào đó, nói chung mỗi người đều có thể đưa ra kết quả, nhưng chưa hẳn đúng và giống nhau. Hơn nữa, có thể có những cách đếm khác nhau. Chẳng hạn, cùng là kết quả 36 nhưng có người đếm là 36x1, có người lại ra là 6x6, đó đã là hai cách hoàn toàn khác nhau. Bài toán đếm cũng rất hay làm khó người giải (HS và cả giáo viên (GV)), làm họ dễ dẫn đến nhầm lẫn trong tính toán. Do đó, khả năng tư duy, lập luận là hết sức quan trọng, giúp HS tìm ra, xác định chiến lược giải và trình bày lời giải chính xác.

Bài báo này trình bày một số biện pháp phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho HS chuyên Toán THPT trong dạy học chủ đề "Phương pháp đếm nâng cao".

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Về tư duy và năng lực tư duy

Theo Từ điển Tiếng Việt, "*Tư duy là quá trình nhận thức, phản ánh những thuộc tính bản chất, những mối quan hệ có tính chất quy luật của sự vật, hiện tượng*" (Hoàng Phê, 1998). Nguyễn Thanh Hưng (2019, tr 184-187) cho rằng: "*tư duy là giai đoạn cao của nhận thức, đi sâu vào bản chất và phát hiện ra quy luật của sự vật bằng các hình thức như biểu tượng, phán đoán, suy lí,... Đối tượng của tư duy là những hình ảnh, biểu tượng, kí hiệu. Các thao tác tư duy chủ yếu gồm: phân tích, tổng hợp, so sánh, tương tự, khái quát hóa, trừu tượng hóa,...*". Theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán, một trong những biểu hiện quan trọng của năng lực tư duy và lập luận toán học là "*thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt phát hiện được sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát*" (Bộ GD-ĐT, 2018). Từ các bài toán đếm quen thuộc, HS có thể tự tìm lời giải cho các bài toán tương tự, tìm ra được sự khác nhau giữa các bài toán, và cao hơn là có thể phát biểu các bài toán mới.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi xem lập luận là một thành phần, một phương thức đặc thù của tư duy toán học và là một thành phần của năng lực toán học, tập trung vào khả năng của HS thực hiện hoạt động suy luận và chứng minh (hoặc bác bỏ) - từ đó lựa chọn được đúng đắn đối tượng, cách thức và kết quả quy luật toán học... khi học Toán.

Từ đó, chúng tôi xác định cấu trúc của năng lực tư duy và lập luận toán học của HS trong học Toán bao gồm 05 thành tố: - Kĩ năng lập luận để xác định cấu trúc bài toán và phân chia các trường hợp; - Kĩ năng lập luận để nhận diện bài toán và kiến thức có liên quan; - Kĩ năng lập luận để tìm đoán và lựa chọn đường lối giải; - Kĩ năng lập luận để thực hiện quá trình giải bài toán; - Kĩ năng lập luận để đánh giá quá trình giải và nghiên cứu sâu bài toán.

2.2. Về chủ đề "Phương pháp đếm nâng cao"

Cơ sở của phép đếm là định nghĩa phép đếm, các nguyên lí đếm và các số tổ hợp. Tuy nhiên, với các công cụ cơ sở đó, chúng ta thường chỉ giải được những bài toán ở dạng đơn giản. Với các bài toán có yêu cầu phức tạp hơn, cần đến các phương pháp đếm nâng cao. Ở đây chúng tôi giới thiệu 4 phương pháp thường hay sử dụng trong giải các bài toán đếm hay còn gọi là phương pháp đếm nâng cao: Sử dụng nguyên lí bù trừ, sử dụng truy hồi, sử dụng song ánh và sử dụng hàm sinh.

Sử dụng nguyên lí bù trừ: Nội dung của nguyên lí: Cho $A_1, A_2, ..., A_n (n \geq 1)$ là các tập hợp hữu hạn khác rỗng thì

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\right| + ... + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

hay

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1<...<i_k\leq n}\left|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap ...\cap A_{i_k}\right| \quad (1)$$

Các bước giải bài toán sử dụng nguyên lí bù trừ: - Bước 1: Gọi các tập hợp phù hợp, xác định cần tính số phần tử của tập nào. - Bước 2: Đưa ra công thức bù trừ với hợp của một số tập đã gọi. - Bước 3: Tính số phần tử của các tập trong công thức. - Bước 4: Thay số vào công thức và tính số cần tìm.

Đếm bằng phương pháp truy hồi: Xuất phát từ các bài toán với số lượng nhỏ các đối tượng, cần giải bài toán khi nâng số lượng lớn hơn. Khi đó cần tìm mối liên hệ giữa các kết quả khi thay đổi số lượng và đưa ra hệ thức truy hồi cho kết quả.

Các bước giải toán: - Bước 1: Gọi các tập hợp các trường hợp xảy ra với giá trị *n*. - Bước 2: Đưa ra mối liên hệ giữa các tập khi tăng giá trị lên n+1, n+2. - Bước 3: Đưa ra biểu thức truy hồi của số cần tìm. - Bước 4: Sử dụng biểu thức truy hồi để tính số cần tìm.

Phương pháp sử dụng song ánh: Dựa trên tính chất của song ánh "Nếu có một song ánh từ tập A đến tập B thì số phần tử của *A* và *B* bằng nhau", có thể giải bài toán đếm theo các bước như sau: - Bước 1: Xác định tập *A* cần tính (ở đề bài) và tập mới *B* có thể tạo được song ánh với *A*. - Bước 2: Thiết lập song ánh giữa *A* và *B*. - Bước 3: Tính số phần tử của *B*. - Bước 4: Suy ra số phần tử của *A*.

Ngoài ra, có thể sử dụng phương pháp hàm sinh (Đây là phương pháp được coi là mới và hiện đại). Các nghiên cứu về vấn đề này còn nhiều hạn chế, các đề thi cũng ít thấy xuất hiện các bài toán ứng dụng phương pháp này.

2.3. Một số biện pháp sư phạm

Biện pháp 1: Hướng dẫn và tập luyện cho HS khả năng nhìn bài toán đếm dưới nhiều góc độ khác nhau để tìm được nhiều cách giải khác nhau.

Bài toán đếm có rất nhiều bài tập đa dạng và phong phú, có thể nhìn nhận ở các góc độ khác nhau, mỗi cách nhìn nhận có thể tạo ra những cách giải khác nhau. Trong quá trình dạy học, việc rèn luyện cho HS nhìn nhận bài toán theo nhiều hình thức khác nhau sẽ rèn luyện được tính mềm dẻo, nhuần nhuyễn và độc đáo của tư duy. Để tìm được nhiều cách giải cho một bài toán, trước hết HS cần nắm vững các kiến thức cơ bản và các phương pháp giải toán. Đồng thời, bằng tư duy lập luận, HS sẽ trình bày được các cách để giải bài toán.

Cách thức thực hiện: GV đưa ra các bài toán đếm có thể giải bằng nhiều cách, nhiều phương pháp khác nhau. GV yêu cầu HS giải bài tập đó, hướng dẫn HS các cách nhìn nhận khác nhau để đưa ra các lời giải khác nhau cho bài toán.

Sau khi đưa ra các lời giải thì so sánh để nhận xét về ưu điểm, nhược điểm của từng cách giải, đưa ra lời giải tối ưu nhất.

Ví dụ 1. Xét các số nguyên dương *n* và $k \leq [n/2]$. Cho *n* điểm trên đường thẳng, có bao nhiêu cách chọn ra *k* điểm sao cho không có hai điểm liên tiếp được chọn.

Phân tích: Gặp bài toán này, HS không thể làm theo cách đếm chia các trường hợp cụ thể, vì ở đây số *n* và *k* là các số ở dạng tổng quát. Khi đó cần nghĩ đến phương pháp đếm nâng cao, phương pháp nào có thể chọn lựa để giải quyết bài toán, qua đây thể hiện hoạt động tư duy *phân tích* của HS.

+ Hướng thứ nhất có thể chọn trực tiếp *k* điểm thỏa mãn điều kiện, cách này cần chia trường hợp cụ thể, và như nói ở trên là không khả thi. Qua đây thể hiện hoạt động tư duy *so sánh, bác bỏ* của HS.

+ Hướng thứ hai có thể chuyển việc chọn *k* điểm thỏa mãn điều kiện về việc chọn số điểm ở giữa những điểm này, giữa 2 điểm được chọn có ít nhất 1 điểm. Đến đây cho suy nghĩ sử dụng bài toán chia kẹo Ơle để giải bài toán trên.

Lời giải 1. Giả sử *k* điểm được chọn là $A_1, A_2, ..., A_k$ theo thứ tự trên đường thẳng, gọi x_1 là số điểm trước A_1, $x_i\ (i = 2,3,...,k)$ là số điểm giữa A_i và A_{i+1}, x_{k+1} là số điểm sau A_k.

Số cách chọn *k* điểm thỏa mãn điều kiện bằng số bộ $(x_1, x_2, ..., x_k)$ thỏa mãn hệ điều kiện

$$\begin{cases} x_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1,2,...,k+1 \\ x_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = 2,3,...,k \\ x_1 + x_2 + ... + x_{k+1} = n - k \end{cases}$$

(các $x_i, i = 2,3,...,k$ là các số nguyên dương vì giữa 2 điểm được chọn có ít nhất 1 điểm).

Thực hiện đổi biến $y_1 = x_1, y_{k+1} = x_{k+1}, y_i = x_i - 1, \forall i = 2,3,...,k$ ta được hệ mới

$$\begin{cases} y_i \in \mathbb{N}, \forall i = 1,2,...,k+1 \\ y_1 + y_2 + ... + y_{k+1} = n - 2k + 1 \end{cases} (\mathrm{I})$$

Ta có "Bài toán chia kẹo của Ole": Cho k, n là các số nguyên dương. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_k = n$ *là* C_{n+k-1}^{k-1}. Áp dụng vào bài toán trên, số nghiệm của (I) là C_{n-k+1}^{k}, suy ra số cách chọn thỏa mãn là C_{n-k+1}^{k}. Kết thúc lời giải 1.

Lời giải 2. Kí hiệu $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ là tập *n* điểm theo thứ tự trên đường thẳng. Thiết lập một ánh xạ

$f: A \to B$, $(A_{a_1}, A_{a_2}, A_{a_3}, ..., A_{a_k}) \mapsto (A_{a_1}, A_{a_2-1}, A_{a_3-2}, ..., A_{a_k-k+1})$ với

$A = \{(A_{a_1}, A_{a_2}, ..., A_{a_k}) \mid a_i < a_{i+1} - 1, 1 \le a_i \le n\}$, $B = \{(A_{b_1}, A_{b_2}, ..., A_{b_k}) \mid b_i \le b_{i+1};\ 1 \le b_i \le n - k + 1\}$

Ta chứng minh f là một song ánh.

Với hai bộ bất kì $(a_1; a_2; a_3; ...; a_k)$, $(a_1^{'}; a_2^{'}; a_3^{'}; ...; a_k^{'})$ là khác nhau, nghĩa là chúng khác nhau tại một vị trí nào đó, giả sử là vị trí thứ *i*, tức là $a_i \ne a_i^{'} \Rightarrow a_i - i + 1 \ne a_i^{'} - i + 1$, hay hai bộ $(a_1; a_2 - 1; a_3 - 2; ...; a_k - k + 1)$; $(a_1^{'}; a_2^{'} - 1; a_3^{'} - 2; ...; a_k^{'} - k + 1)$ là khác nhau.

Suy ra *f* là đơn ánh.

Với mỗi bộ $(a_1; a_2 - 1; a_3 - 2; ...; a_k - k + 1)$ rõ ràng luôn cho một bộ $(a_1; a_2; a_3; ...; a_k) \in A$, hay *f* là toàn ánh.

Vậy *f* là song ánh. Suy ra $|A| = |B|$ = số cách chọn *k* số từ n – k + 1 số (mà không quan tâm thứ tự) $= C_{n-k+1}^{k}$.

Qua ví dụ trên, GV đã tạo được các tình huống mà HS có thể nhìn nhận bài toán đếm qua nhiều phương diện khác nhau, từ đó tìm được các lời giải khác nhau cho mỗi bài. Với mỗi cách giải khác nhau, HS đã được phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học.

Biện pháp 2: Tập luyện cho HS thói quen không suy nghĩ rập khuôn, máy móc, không bị phụ thuộc vào các dạng bài có sẵn để HS có tư duy logic, xử lí linh hoạt trước những tình huống mới

Một trong những thuộc tính quan trọng của tư duy là tính mềm dẻo. Tính mềm dẻo thể hiện ở khả năng dễ dàng chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, không suy nghĩ rập khuôn, không áp dụng máy móc những kinh nghiệm, kiến thức, kĩ năng đã có, đã biết vào hoàn cảnh mới, điều kiện mới mà trong đó có những yếu tố thay đổi. Vì vậy, biện pháp này nhằm rèn luyện cho HS tính mềm dẻo của tư duy.

Cách thức thực hiện: GV phải linh hoạt, mềm dẻo trong gợi mở vấn đề để HS từ những kiến thức đã có có thể tổng hợp các công cụ để giải quyết bài toán, không áp đặt để HS không suy nghĩ cứng nhắc, máy móc và bắt chước theo một hướng giải quyết nào. GV cũng cần khuyến khích HS sáng tạo đưa ra các hướng giải quyết chứ không liệt kê cụ thể tất cả các phương pháp mà nên đưa ra dấu hiệu tương ứng gợi mở để HS phát hiện ra phương pháp.

Ví dụ 2. Cho số nguyên dương $n \ge 2$. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 và 5 có thể tạo được bao nhiêu số tự nhiên có *n* chữ số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: a) Số này chia hết cho 5; b) Tổng các chữ số là số chẵn.

Phân tích: Trước hết GV có thể hướng dẫn HS giải bài toán khi các số này thỏa mãn điều kiện a).

Giả sử số này có dạng $\overline{a_1 a_2 ... a_n}$, khi đó a_n có 2 cách chọn (chữ số 0 hoặc 5), a_1 có 5 cách chọn (khác chữ số 0), mỗi số còn lại có 6 cách chọn.

Áp dụng quy tắc nhân, số các số thỏa mãn là 10.6^{n-2}.

Những bài toán liên quan tổng các chữ số của số (chẵn, lẻ, chia hết cho 3, cho 9), trước đây HS thường chia các trường hợp và tính trong từng trường hợp. Tuy nhiên với ví dụ này, việc chia trường hợp là khó khăn do *n* là số ở dạng tổng quát. Để hiểu bài toán hơn, GV hướng dẫn HS giải bài toán với các trường hợp *n* có giá trị nhỏ, khi cố định điều kiện i.

Với n = 2, ta có các số có tổng chẵn là 20, 40, 15, 35, 55 các số có tổng lẻ là 10, 30, 50, 25, 45.

Với n = 3, ta có các số thỏa mãn là $200, 220, 240, 400, 420, 440, 105, 125, 145, 305, 325, 345, 505, 525, 545, 110, 130, 150, 310, 330, 350, 510, 530, 550, 215, 235, 255, 415, 435, 455.$

Nhận thấy với n = 3, việc chia trường hợp đã phức tạp. Tuy nhiên có thể thấy các số ở trường hợp $n = 3$ có thể tạo ra từ các số ở trường hợp trên, khi đó phương pháp truy hồi được sử dụng để giải bài toán.

Lời giải

Gọi S_n là tập các số thỏa mãn điều kiện i, A_n là tập con của S_n mà mỗi phần tử trong A_n có tổng các chữ số là chẵn, $B_n = S_n \setminus A_n$.

Mỗi phần tử trong A_n có thể tạo ra 3 phần tử thuộc A_{n+1} (thêm 0, 2, hoặc 4 vào trước chữ số hàng đơn vị) và 3 phần tử thuộc B_{n+1}.

Mỗi phần tử trong B_n có thể tạo ra 3 phần tử thuộc A_{n+1} (thêm 0, 2, hoặc 4 vào trước chữ số hàng đơn vị) và 3 phần tử thuộc B_{n+1}. Suy ra

$$\begin{cases} |A_{n+1}| = 3(|A_n| + |B_n|) \\ |B_{n+1}| = 3(|A_n| + |B_n|) \end{cases} \Rightarrow |A_n| = |B_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{10.6^{n-1}}{2} = 5.6^{n-1}.$$

Qua ví dụ trên, HS được rèn luyện thói quen không suy nghĩ rập khuân, máy móc, không bị phụ thuộc vào các dạng bài có sẵn. Từ đó giúp HS phát triển tư duy logic, khả năng linh hoạt trong những tình huống mới. Qua các hoạt động trên, HS có khả năng phân tích, so sánh các bài toán với nhau từ đó giải thích, điều chỉnh cách thức giải quyết vấn đề. Đây chính là một trong các thành phần của năng lực tư duy và lập luận toán học.

Biện pháp 3: Hướng dẫn và tập luyện cho HS khả năng khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa, khả năng lập luận Toán học để giải bài toán và phát biểu các bài toán mới.

Trong tác phẩm "Giải toán như thế nào", G. Polya đã viết: "Cách giải này đúng thật, nhưng làm thế nào để phát hiện ra những sự kiện như vậy? và làm thế nào để tự mình phát hiện ra được?" (Polya, 1997). Quan điểm này của G. Polya muốn nhấn mạnh ý nghĩa của việc dạy cho HS biết tự tìm tòi lời giải, tự tìm ra cái mới từ những cái quen thuộc, đã biết.

Cách thức thực hiện: Để có thể phát hiện và đề xuất được bài toán mới, phương pháp mới từ các bài toán đã cho, có thể hướng dẫn HS theo các con đường sau đây: - Sử dụng các thao tác tư duy như: đặc biệt hóa, tương tự hóa, tổng quát hóa… để đi đến bài toán đặc biệt hóa, tương tự, bài toán đảo, hay tổng quát hóa; - Nghiên cứu sâu bản chất của bài toán, đoán nhận được cơ sở sự hình thành bài toán,… để xây dựng các bài toán cùng dạng; - Xét sự thay đổi giả thiết, từ đó dẫn đến sự thay đổi tương ứng của kết luận, để xây dựng, đề xuất các bài toán mới; - Các câu hỏi có thể hướng dẫn HS trả lời là: + Bài toán đã cho tương tự với các bài toán nào? + Bài toán có là trường hợp đặc biệt của bài toán nào không? + Có thể mở rộng bài toán này theo các hướng nào? + Có thể thay đổi giả thiết, điều kiện nào, có thể thêm điều kiện gì? + Phương pháp giải bài toán này có thể áp dụng cho các dạng toán nào khác? + Bài toán này có nêu lên vấn đề nào mới không?

Ví dụ 3. Cho hai tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và tập $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$. Có bao nhiêu song ánh $f : A \to B$?

Đây là bài toán cơ bản mà HS chuyên Toán đều có thể giải quyết được. Kết quả của bài toán là $n!$.

Sau khi HS giải xong bài toán, GV hướng dẫn HS mở rộng thêm bài toán theo các hướng:

Bài toán 1: Cho hai tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và tập $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ với $m \geq n$. Có bao nhiêu đơn ánh $f : A \to B$.

Bài toán 2: Cho hai tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và tập $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ với $m \leq n$. Có bao nhiêu toàn ánh $f : A \to B$.

Bài toán 3: Cho tập hợp $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Có bao nhiêu song ánh $f : A \to A$ mà *f* không có điểm bất động?

Bài toán 4: Cho tập hợp $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Có bao nhiêu song ánh $f:A\to A$ mà *f* có đúng *k* điểm bất động?

Bài toán 5: Cho tập hợp $A=\{1,2,...,n\}$. Có bao nhiêu hoán vị của *A*.

Bài toán 6: Cho tập hợp $A=\{1,2,...,n\}$. Có bao nhiêu hoán vị của *A* có đúng *k* điểm bất động?

Bài toán 7: Có *n* quả bóng $b_1,b_2,...,b_n$ và 2*n* hộp $h_1,h_2,...,h_{2n}$. Biết rằng quả bóng $b_i\,(i=1,2,...,n)$ chỉ bỏ được vào các hộp $h_1,h_2,...,h_{2i}$. Hỏi có bao nhiêu cách bỏ *k* ($1\le k\le n$) quả bóng vào các hộp, biết rằng mỗi hộp chứa nhiều nhất một quả bóng? (Hai cách bỏ bóng được gọi là khác nhau khi ít nhất một quả bóng được bỏ vào hai hộp khác nhau trong hai cách đó).

Bài toán 8: (Bulgaria 1995) Cho số nguyên $n\ge 2$. Tìm số hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của tập hợp $\{1,2,...,n\}$ sao cho tồn tại duy nhất một chỉ số $i\in\{1,2,...,n-1\}$ thỏa mãn điều kiện $a_i>a_{i+1}$?

Bài toán 9: (Canada 1996) Cho số nguyên $n\ge 2$. Gọi u_n là số hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của tập hợp $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}a_1=1\\ |a_{i+1}-a_i|\le 2,\forall i=1,2,...,n-1\end{cases}$. Tìm số dư của u_{1996} khi chia cho 3.

Bài toán 10: (IMO Shortlist 2008) Cho số nguyên dương *n*. Tìm số hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của tập hợp $\{1,2,...,n\}$ thỏa mãn tính chất: $2(a_1+a_2+...+a_k)$ chia hết cho *k* với mọi $k=1,2,...,n$.

Bài toán 11: (VMO 2003) Với mỗi số nguyên $n\ge 2$, kí hiệu s_n là số các hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ của *n* số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi hoán vị $(a_1,a_2,...,a_n)$ đều có tính chất $1\le|a_k-k|\le 2$ với mọi k = 1, ,…n. Chứng minh rằng $1,75.s_{n-1}<s_n<2.s_{n-1}$ với mọi n > 6.

Bài toán 12 (VMO 2009). Cho số nguyên dương n. Kí hiệu T là tập hợp gồm 2n số nguyên dương đầu tiên. Hỏi có tất cả bao nhiêu tập con S của T có tính chất: trong S không tồn tại các số a, b mà $|a-b|\in\{1;n\}$?

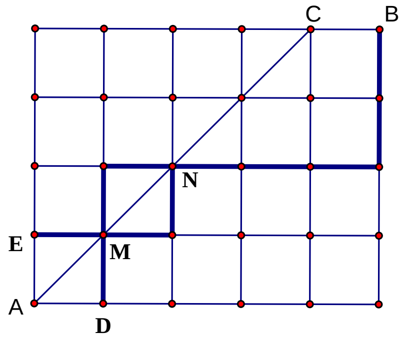
Như vậy, từ các bài toán cơ bản ban đầu, GV có thể linh hoạt khai thác thành nhiều bài toán mới nhằm giúp HS phát triển tư duy thông qua các hoạt động dẫn dắt, định hướng cách suy luận; qua đó HS rèn luyện được khả năng khái quát hóa, đặc biệt hóa, tương tự hóa, khả năng lập luận hợp lí trước khi kết luận.

Biện pháp 4: Đưa ra các bài toán thực tế tạo cơ hội để HS được trải nghiệm, áp dụng toán học vào thực tiễn, để HS rèn luyện tư duy và lập luận toán học

Cách thức thực hiện: GV đưa ra các tình huống thực tế, hướng dẫn HS phát biểu bài toán, đưa về các mô hình đã biết hoặc tương tự các mô hình đã biết và giải bài toán này.

Ví dụ 4: (Bài toán bầu cử) Trong một cuộc bầu cử, số người ủng hộ cho ứng cử viên X là *a* người, ứng cử viên Y là *b* người (*a* > *b*). Cử tri bỏ phiếu tuần tự từng người. Có bao nhiêu cách sắp xếp việc bỏ phiếu để lúc nào X cũng hơn Y về số phiếu bầu?

Lời giải



Xét hình chữ nhật $b\times a$ như hình vẽ (có *b* hàng và *a* cột). Mỗi một cách sắp xếp việc bỏ phiếu là một cách đi từ A đến B (nếu bỏ cho X thì qua phải, bỏ cho Y thì lên trên).

Chú ý: Số cách đi từ A đến B là C_{a+b}^{a}

Thật vậy, ta có thể mã hóa mỗi lần đi lên là số 1, đi qua phải là số 0. Khi đó tồn tại song ánh giữa tập các đường đi với tập các bộ mã gồm đúng a số 1 và b số 0. Số các dãy đó là số cách chọn a vị trí trong $a+b$ vị trí để đặt số 1, ta được kết quả là C_{a+b}^{a}.

Cách sắp xếp để lúc nào X cũng thắng là cách đi từ A đến B mà không chạm AB (không kể điểm A).

Đi từ A đến B mà không chạm AC, nghĩa là bước đầu phải qua D. Số bước đi từ A đến B không chạm AC bằng số cách đi từ D đến B mà không chạm AC bằng số cách đi từ D đến B trừ đi số cách đi từ D đến B mà chạm vào AC.

Mỗi cách đi từ D đến B mà chạm AC, giả sử chạm tại điểm M và N (như hình vẽ) ta lấy đối xứng qua đường AC đoạn đường đi từ D đến N, sẽ được một cách đi từ E đến B, tổng quát hơn thì ta sẽ lấy đối xứng đường đi từ D đến điểm chạm AC cuối cùng. Dễ thấy đây là một song ánh từ tập cách đi từ D đến B mà chạm AC với tập cách đi từ E đến B.

Theo chú ý, ta được: số cách đi từ D đến B là C_{a+b-1}^{a-1}, số cách đi từ E đên B là C_{a+b-1}^{a} Vậy kết quả là $C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a} = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^{a}$.

Tuy nhiên, chúng ta cần hoán vị những cử tri để có được kết quả là $a!b!\frac{a-b}{a+b}C_{a+b}^{a}$

3. Kết luận

Bài viết đã đề xuất một số biện pháp sư phạm nhằm phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho HS thông qua dạy học chủ đề "phương pháp đếm nâng cao". Trong mỗi biện pháp, tác giả đã trình bày các ví dụ minh họa, phân tích để làm rõ những lưu ý, hiệu quả trong quá trình sử dụng các biện pháp sư phạm đã đề xuất. Các biện pháp này cần được thực hiện đồng bộ trong quá trình dạy học để bổ sung, hỗ trợ cho nhau trong việc phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho HS.

Tài liệu tham khảo

Arthur Engel (1999). *Problem - Solving Strategies*. Springer.
Bộ GD-ĐT (2007a). *Đại số và giải tích 11 nâng cao*. NXB Giáo dục Việt Nam.
Bộ GD-ĐT (2007b). *Đại số và giải tích 11 nâng cao - Sách bài tập*. NXB Giáo dục Việt Nam.
Bộ GD-ĐT (2007c). *Đại số và giải tích 11 nâng cao - Sách giáo viên*. NXB Giáo dục Việt Nam.
Bộ GD-ĐT (2009). *Chương trình chuyên sâu trung học phổ thông chuyên môn Toán ban hành theo Công văn số 10803/BGDĐT-GDTrH ngày 16/12/2009.*
Bộ GD-ĐT (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (ban hành theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018).*
Hoàng Phê (1998). *Từ điển tiếng Việt*. NXB Khoa học xã hội.
Nguyễn Thanh Hưng (2019). *Rèn luyện thao tác tư duy cho học sinh trong dạy học chương "Tứ giác" (Toán 8) ở trường trung học cơ sở*. Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt tháng 4, tr 184-187.
Nguyễn Bá Kim (2016). *Phương pháp dạy học môn Toán*. NXB Đại học Sư phạm.
G. Polya (1997a). *Giải bài toán như thế nào?*. NXB Giáo dục.
G. Polya (1997b). *Toán học và những suy luận có lí*. NXB Giáo dục.